Glava 1

Linearni operatori u konačnodimenionalnim vektorskim prostorima

U ovoj glavi ćemo se upoznati sa preslikavanjima jednih vektorskih prostora u druge. Takva preslikavanja ćemo nazivati operatorima. Linearna algebra se bavi operatorima koji imaju svojstvo linearnosti.

1.1 Definicija i osnovna svojstva

Neka su V i W vektorski prostori nad poljem $\mathbb{P}$.

Definicija 1.1.1. Preslikavanje $\mathscr{A} : V \to W$ se naziva linearnim operatorom ako ispunjava sljedeća dva uslova:
(i) $\mathscr{A}(x+y) = \mathscr{A}x + \mathscr{A}y$, $\forall x, y \in V$ (aditivnost) i
(ii) $\mathscr{A}(\alpha x) = \alpha\mathscr{A}x$, $\forall x \in V$ i $\forall \alpha \in \mathbb{P}$ (homogenost).

Linearne operatore ćemo uvijek označavati velikim latinskim pisanim slovima, recimo $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$, itd. Sa $\mathcal{L}(V \to W)$ označavamo skup svih linearnih operatora koji preslikavaju prostor V u prostor W (kasnije ćemo vidjeti da je riječ o vektorskom prostoru nad poljem $\mathbb{P}$). Dakle, oznaka $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$ znači da je $\mathscr{A}$ linearan operator iz prostora V u prostor W.

Lema 1.1.2. *$\mathscr{A} : V \to W$ je linearan operator, ako i samo ako važi*

$$\mathscr{A}(\alpha x + \beta y) = \alpha\mathscr{A}x + \beta\mathscr{A}y, \quad \forall x, y \in V \ \ i \ \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{P}.$$

Dokaz. Ako je $\mathscr{A}$ linearan operator, tada za $x, y \in V$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{P}$ imamo

$$\mathscr{A}(\alpha x + \beta y) = \mathscr{A}(\alpha x) + \mathscr{A}(\beta y) = \alpha\mathscr{A}x + \beta\mathscr{A}y.$$

Obrnuto, ako je ispunjeno svojstvo u formulaciji leme, tada možemo postaviti $\alpha = 1$ i $\beta = 1$ kako bismo ustanovili aditivnost operatora, a potom $\alpha = 1$ i $\beta = 0$ čime zaključujemo da važi i homogenost. $\square$

Lema 1.1.3. *Neka je* $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$. *Tada važi* $\mathscr{A}\theta_V = \theta_W$ *(tj.* $\mathscr{A}$ *preslikava nula-vektor prostora* V *u nula-vektor prostora* W*) i* $\mathscr{A}(-x) = -\mathscr{A}x$, $\forall x \in V$.

Dokaz. Imajući u vidu svojstvo homogenosti, nalazimo $\mathscr{A}\theta_V = \mathscr{A}(0 \cdot \theta_V) = 0 \cdot \mathscr{A}\theta_V = \theta_W$ i $\mathscr{A}(-x) = \mathscr{A}((-1) \cdot x) = (-1) \cdot \mathscr{A}x = -\mathscr{A}x$. □

Primjer 1.1.4. (i) Razmotrimo operator $\mathscr{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\mathscr{A}x = 2x$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Važi

$$\mathscr{A}(x+y) = 2(x+y) = 2x + 2y = \mathscr{A}x + \mathscr{A}y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

i

$$\mathscr{A}(\alpha x) = 2(\alpha x) = \alpha(2x) = \alpha\mathscr{A}x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \text{ i } \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Dakle, možemo zaključiti da je $\mathscr{A}$ linearni operator, tj. $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n)$.

(ii) Razmotrimo operator $\mathscr{P}$ koji preslikava prostor $\mathbb{R}^2$ u $\mathbb{R}^2$ zadat na sljedeći način:

$$\mathscr{P}x = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Za $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ i $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ je $x + y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}$ i prema tome

$$\mathscr{P}(x+y) = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathscr{P}x + \mathscr{P}y.$$

Kako je $\alpha x = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \end{pmatrix}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, imamo

$$\mathscr{P}(\alpha x) = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha\mathscr{P}x.$$

Ovim smo ustanovili da je $\mathscr{P}$ linearni operator.

Operator $\mathscr{P}$ se naziva operatorom projekcije.

(iii) Na prostoru geometrijskih vektora R^2 razmotrimo operator rotacije za ugao $\frac{\pi}{2}$ suprotno kazaljci na satu. Označimo ovaj operator sa $\mathscr{R}_{\frac{\pi}{2}}$. Možemo se neposredno provjeriti da je $\mathscr{R}_{\frac{\pi}{2}}$ linearni operator, tj. $\mathscr{R}_{\frac{\pi}{2}} \in \mathcal{L}(R^2 \to R^2)$.

(iv) Neka je M_n vektorski prostor svih polinoma stepena $\leq n$ sa koeficjentima iz polja $\mathbb{R}$ i razmotrimo operator diferenciranja $\mathscr{D}$. Iz svojstava diferenciranja znamo da ovaj operator preslikava M_n u M_{n-1} i da pri tome važi

$$\mathscr{D}(p+q) = \mathscr{D}p + \mathscr{D}q, \quad \forall p, q \in M_n$$

i

$$\mathscr{D}(\alpha p) = \alpha\mathscr{D}p, \quad \forall p \in M_n \text{ i } \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Prema tome $\mathscr{D}$ je linearni operator iz prostora M_n u M_{n-1}, tj. $\mathscr{D} \in \mathcal{L}(M_n \to M_{n-1})$.

1.2 Jezgro i slika linearnog operatora

Jezgro operatora je skup svih vektora koji se slikaju u nula-vektor, dok je njegova slika skup svih vektora u koje se neki vektor preslikava. Ova dva pojma ćemo precizirati u definicijama koje slijede.

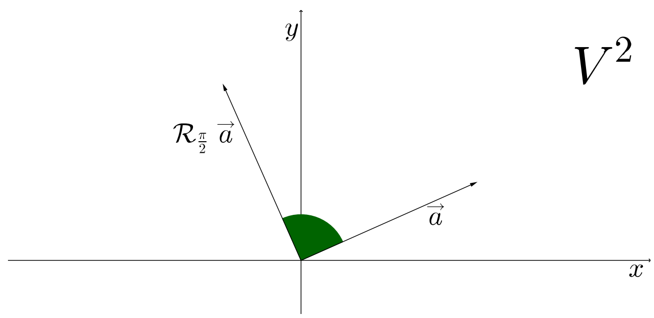
Definicija 1.2.1. Jezgro linearnog operatora $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$ je skup

$$\operatorname{Ker} \mathscr{A} = \{u \in V : \mathscr{A} u = \theta_W\}.$$

Definicija 1.2.2. Slika linearnog operatora $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$ je skup

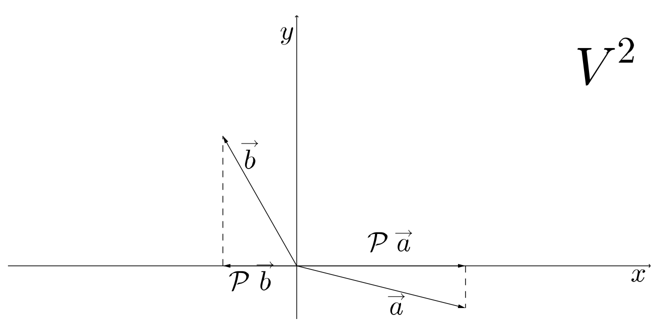
$$\operatorname{Im} \mathscr{A} = \{w \in W : \exists u \in V \ \mathscr{A} u = w\}.$$

Primjer 1.2.3. (i) Za operator rotacije u ravni za ugao $\frac{\pi}{2}$ imamo $\operatorname{Ker} \mathscr{R}_{\frac{\pi}{2}} = \{\theta\}$ i $\operatorname{Im} \mathscr{R}_{\frac{\pi}{2}} = R^2$.



Slika 1.1: Operator rotacije za ugao $\frac{\pi}{2}$

(ii) Razmotrimo operator projekcije $\mathscr{P} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2)$ zadat sa $\mathscr{P}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Lako je vidjeti da je $\operatorname{Ker} \mathscr{P} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}\}$ i $\operatorname{Im} \mathscr{P} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$.



Slika 1.2: Operator projekcije na x-osu.

(iii) Jezgro operatora $\mathscr{D} \in \mathcal{L}\,(M_n \to M_{n-1})$ čine svi polinomi konstante, dok su u njegovoj slici svi polinomi stepena $\leq n-1$. Dakle, $\operatorname{Ker} \mathscr{D} = \{\text{const}\}$ i $\operatorname{Im} \mathscr{D} = M_{n-1}$.

Napomena 1.2.4. Ukoliko jezgro operatora sadrži samo nula-vektor (kao, na primjer, u slučaju operatora $\mathscr{R}_{\frac{\pi}{2}}$), govorićemo da je jezgro operatora trivijalno.

Teorema 1.2.5. *(i) Jezgro linearnog operatora $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$ je vektorski potprostor u V.*
(ii) Slika linearnog operatora $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$ je vektorski potprostor u W.

Dokaz. (i) Neka su $u, v \in \operatorname{Ker} \mathscr{A}$ proizvoljni vektori i $\alpha \in \mathbb{P}$ proizvoljna skalar. Tada je $\mathscr{A}u = \mathscr{A}v = \theta_W$. Prema tome je $\mathscr{A}(u+v) = \mathscr{A}u + \mathscr{A}v = \theta_W + \theta_W = \theta_W$. Dakle, $u+v \in \operatorname{Ker} \mathscr{A}$. Takođe je $\mathscr{A}(\alpha u) = \alpha \mathscr{A}u = \alpha \cdot \theta_W = \theta_W$. Dakle, imamo $\alpha u \in \operatorname{Ker} \mathscr{A}$. Sada možemo zaključiti da je $\operatorname{Ker} \mathscr{A}$ zaista vektorski potprostor u V.

(ii) Pretpostavimo da su $w, z \in \operatorname{Im} \mathscr{A}$ proizvoljni vektori i $\alpha \in \mathbb{P}$ proizvoljan skalar. Tada postoje $u, v \in V$ tako da je $\mathscr{A}u = w$ i $\mathscr{A}v = z$, pa imamo $\mathscr{A}(u+v) = \mathscr{A}u + \mathscr{A}v = w+z$. Dakle, vektor $u + v \in V$ se slika u $w + z$, tj. $w + z \in \operatorname{Im} \mathscr{A}$. Primjenom svojstva homogenosti imamo $\mathscr{A}(\alpha u) = \alpha \mathscr{A} u = \alpha w$, pa se, dakle, vektor αu slika u αw, tj. $\alpha w \in \operatorname{Im} \mathscr{A}$. Iz prethodnog slijedi da je $\operatorname{Im} \mathscr{A}$ zaista vektorski potprostor u W. $\square$

Teorema 1.2.6. *Neka je $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$ i neka je $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ baza u prostoru V. Tada je*

$$\operatorname{Im} \mathscr{A} = \operatorname{Lin}\{\mathscr{A}u_1, \mathscr{A}u_2, \ldots, \mathscr{A}u_n\}.$$

Dokaz. Neka je $w \in \operatorname{Im} \mathscr{A}$ proizvoljan vektor. Tada postoji $v \in V$ tako da je $w = \mathscr{A}v$. Ako je $v = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j$ razlaganje vektora v po bazi u V, tada imamo

$$w = \mathscr{A}v = \mathscr{A}\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j\right) = \alpha_j \sum_{j=1}^{n} \mathscr{A}u_j.$$

Dakle, $w \in \operatorname{Lin}\{\mathscr{A}u_1, \mathscr{A}u_2, \ldots, \mathscr{A}u_n\}$, tj. $\operatorname{Im} \mathscr{A} \subseteq \operatorname{Lin}\{\mathscr{A}u_1, \mathscr{A}u_2, \ldots, \mathscr{A}u_n\}$.

Pokažimo sada obrnutu inkluziju. Neka je $v \in \operatorname{Lin}\{\mathscr{A}u_1, \mathscr{A}u_2, \ldots, \mathscr{A}u_n\}$. Tada je

$$v = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \mathscr{A}u_j = \mathscr{A}\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j\right) \in \operatorname{Im} \mathscr{A}.$$

Dakle, $\operatorname{Lin}\{\mathscr{A}u_1, \mathscr{A}u_2, \ldots, \mathscr{A}u_n\} \subseteq \operatorname{Im} \mathscr{A}$. $\square$

Primjer 1.2.7. (i) Razmotrimo operator projekcije $\mathscr{P} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2)$. U $\mathbb{R}^2$ izaberimo bazu $\{u_1, u_2\}$, gdje je

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad u_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Tada imamo

$$\mathscr{P}u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \mathscr{P}u_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Prema prethodnoj teoremi je

$$\operatorname{Lin}\{\mathscr{P}u_1, \mathscr{P}u_2\} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}\} = \operatorname{Im} \mathscr{P}.$$

(ii) Za operator rotacije $\mathscr{R}_{\frac{\pi}{2}} \in \mathcal{L}(R^2 \to R^2)$ razmotrimo standardnu bazu $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ u R^2. Primijetimo da je

$$\mathscr{R}_{\frac{\pi}{2}}\vec{e}_1 = \vec{e}_2 \quad \text{i} \quad \mathscr{R}_{\frac{\pi}{2}}\vec{e}_2 = -\vec{e}_1,$$

pa je $\operatorname{Im} \mathscr{R}_{\frac{\pi}{2}} = \operatorname{Lin}\{\vec{e}_2, -\vec{e}_1\} = R^2$.

(iii) Razmotrimo standardnu bazu $\{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$ u prostoru polinoma M_n. Kako je $\mathscr{D}1 = 0$, $\mathscr{D}t = 1$, $\mathscr{D}t^2 = 2t, \ldots, \mathscr{D}t^n = nt^{n-1}$, imamo $\operatorname{Im} \mathscr{D} = \operatorname{Lin}\{0, 1, 2t, \ldots, nt^{n-1}\} = M_{n-1}$.

Teorema 1.2.8. *Neka je $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$ i $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ linearno zavisan sistem vektora u prostoru V. Tada je $\{\mathscr{A}u_1, \mathscr{A}u_2, \ldots, \mathscr{A}u_m\}$ linearno zavisan sistem u W.*

Dokaz. Neka je $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_m u_m = \theta_V$, pri čemu postoji $\alpha_i \neq 0$, $1 \leq i \leq m$. Ako na posljednju jednakost djelujemo operatorom $\mathscr{A}$, dobijamo

$$\mathscr{A}(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_m u_m) = \alpha_1 \mathscr{A}u_1 + \alpha_2 \mathscr{A}u_2 + \cdots + \alpha_m \mathscr{A}u_m = \mathscr{A}\theta_V = \theta_W.$$

Kako je riječ o netrivijalnoj linearnoj kombinaciji, možemo zaključiti da je sistem vektora $\{\mathscr{A}u_1, \mathscr{A}u_2, \ldots, \mathscr{A}u_m\}$ linearno zavisan. □

Ova teorema se može preformulisati na sledeći način.

Posljedica 1.2.9. *Neka je $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$. Ako je $\{\mathscr{A}u_1, \mathscr{A}u_2, \ldots, \mathscr{A}u_m\}$ linearno nezavisan sistem vektora u W, tada je $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ takođe linearno nezavisan sistem u V.*

Teorema 1.2.10. *Neka je $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ baza u V, a $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ proizvoljan sistem vektora u W. Postoji jedinstven linearani operator $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$ tako da je $\mathscr{A}v_j = w_j$, $j = \overline{1, n}$.*

Dokaz. Neka je $u \in V$ proizvoljan vektor i $u = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j$ razlaganje vektora u po bazi u V. Definišimo operator $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$ na sljedeći način:

$$\mathscr{A}u = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j w_j.$$

Neposredno se može provjeriti da je $\mathscr{A}$ zaista linearni operator. Takođe imamo

$$\begin{aligned} \mathscr{A}v_j &= \mathscr{A}(0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \cdots + 1 \cdot v_j + \cdots + 0 \cdot v_n) \\ &= 0 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2 + \cdots + 1 \cdot w_j + \cdots + 0 \cdot w_n = w_j, \quad j = \overline{1, n}, \end{aligned}$$

Da ustanovimo jedinstvenost, pretpostavimo da i za linearni operator $\mathscr{B} \in \mathcal{L}(V \to W)$ važi $\mathscr{B}v_j = w_j$, $j = \overline{1, n}$. Izaberimo proizvoljan vektor $u \in V$ i neka je $u = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j$. Tada imamo

$$\mathscr{B}u = \mathscr{B}\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathscr{B}v_j = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j w_j = \mathscr{A}u.$$

Dakle, $\mathscr{A}u = \mathscr{B}u$, $\forall u \in V$, tj. $\mathscr{A} \equiv \mathscr{B}$. □

Definicija 1.2.11. Rangom linearnog operatora $\mathscr{A}$ nazivamo dimenziju njegove slike. Oznaka: $\operatorname{rank} \mathscr{A}$.

Definicija 1.2.12. Defektom linearnog operatora $\mathscr{A}$ nazivamo dimenziju njegovog jezgra. Oznaka: $\operatorname{defect} \mathscr{A}$.

Dakle,

$$\operatorname{rank} \mathscr{A} = \dim \operatorname{Im} \mathscr{A} \quad \text{i} \quad \operatorname{defect} \mathscr{A} = \dim \operatorname{Ker} \mathscr{A}.$$

Lema 1.2.13. *Neka je $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$. Tada je* $\operatorname{rank} \mathscr{A} \leq \dim V$.

Dokaz. Neka je $\dim V = n$ i neka je $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ baza u prostoru V. Prema Teoremi 1.2.6 je $\operatorname{Im}\mathscr{A} = \operatorname{Lin}\{\mathscr{A}u_1, \mathscr{A}u_2, \dots, \mathscr{A}u_n\}$, pa imamo

$$\operatorname{rank}\mathscr{A} = \dim\operatorname{Im}\mathscr{A} = \dim\operatorname{Lin}\{\mathscr{A}u_1, \mathscr{A}u_2, \dots, \mathscr{A}u_n\} \le n.$$

Napomenimo da ukoliko je sistem vektora $\{\mathscr{A}u_1, \mathscr{A}u_2, \dots, \mathscr{A}u_n\}$ linearno nezavisan, ovdje važi znak jednakosti, a ukoliko je taj sistem linearno zavisan, tada je $\operatorname{rank}\mathscr{A} < n$. $\square$

Teorema 1.2.14. *Za svaki operator $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$ važi*

$$\operatorname{rank}\mathscr{A} + \operatorname{defect}\mathscr{A} = \dim V.$$

Dokaz. Neka je $\dim V = n$ i neka je $\dim\operatorname{Ker}\mathscr{A} = k$. Pokazaćemo da je $\operatorname{rank}\mathscr{A} = n-k$. Izaberimo bazu $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ u potprostoru $\operatorname{Ker}\mathscr{A}$ i dopunimo je do baze $\{u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n\}$ prostora V. Pokazaćemo da je sistem vektora $\{\mathscr{A}u_{k+1}, \mathscr{A}u_{k+2}, \dots, \mathscr{A}u_n\}$ baza za $\operatorname{Im}\mathscr{A}$. Zaista, imamo

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}\mathscr{A} &= \operatorname{Lin}\{\mathscr{A}u_1, \dots, \mathscr{A}u_k, \mathscr{A}u_{k+1}, \dots, \mathscr{A}u_n\}\\ &= \operatorname{Lin}\{\theta_W, \dots, \theta_W, \mathscr{A}u_{k+1}, \dots, \mathscr{A}u_n\} = \operatorname{Lin}\{\mathscr{A}u_{k+1}, \dots, \mathscr{A}u_n\},\end{aligned}$$

što znači da sistem vektora $\{\mathscr{A}u_{k+1}, \mathscr{A}u_{k+2}, \dots, \mathscr{A}u_n\}$ generiše $\operatorname{Im}\mathscr{A}$. Preostaje da se pokaže da je taj sistem linearno nezavisan. Neka je $\alpha_{k+1}\mathscr{A}u_{k+1} + \alpha_{k+2}\mathscr{A}u_{k+2} + \dots + \alpha_n\mathscr{A}u_n = \theta_W$. Ova jednakost se može napisati u obliku $\mathscr{A}\left(\sum_{j=k+1}^n \alpha_j u_j\right) = \theta_W$. Dakle, $\sum_{j=k+1}^n \alpha_j u_j \in \operatorname{Ker}\mathscr{A}$, što znači da se ovaj vektor može razložiti po bazi potprostora $\operatorname{Ker}\mathscr{A}$. Neka je $\sum_{j=k+1}^n \alpha_j u_j = \sum_{j=1}^k \beta_j u_j$. Odavde imamo $\sum_{j=1}^k \beta_j u_j + \sum_{j=k+1}^n (-\alpha_j) u_j = \theta_V$. Međutim, sistem vektora $\{u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n\}$ je baza u V, pa slijedi da svi koeficijenti prethodne linearne kombinacije moraju biti jednaki nuli. Posebno, imamo $\alpha_j = 0$ za sve $j = \overline{k+1, n}$. Dakle, pokazali smo da je sistem vektora $\{\mathscr{A}u_{k+1}, \mathscr{A}u_{k+2}, \dots, \mathscr{A}u_n\}$ linearno nezavisan i prema tome baza potprostora $\operatorname{Im}\mathscr{A}$. Na osnovu prethodnog imamo $\dim\operatorname{Im}\mathscr{A} = n - k$, tj. $\operatorname{rank}\mathscr{A} = n - k$. $\square$

1.3 Operacije sa linearnim operatorima

(i) Zbir operatora $\mathscr{A}, \mathscr{B} \in \mathcal{L}(V \to W)$ je operator $\mathscr{A} + \mathscr{B} : V \to W$ koji djeluje na sledeći način:

$$(\mathscr{A} + \mathscr{B})u = \mathscr{A}u + \mathscr{B}u, \quad \forall u \in V.$$

Lako je ustanoviti da $\mathscr{A} + \mathscr{B} \in \mathcal{L}(V \to W)$. Dakle, imamo dobro definisanu operaciju na skupu svih linearnih operatora $\mathcal{L}(V \to W)$.

(ii) Neka je $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$, i neka je $\alpha \in \mathbb{P}$. Množenjem operator $\mathscr{A}$ skalarom $\alpha \in \mathbb{P}$ dobijamo operator $\alpha\mathscr{A} : V \to W$ koji dejstvuje na sljedeći način:

$$(\alpha\mathscr{A})u = \alpha(\mathscr{A}u), \quad \forall u \in V.$$

Lako je provjeriti da $\alpha\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$.

iii) Neka je $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$ i $\mathscr{B} \in \mathcal{L}(W \to Z)$. Tada možemo definisati operator $\mathscr{B} \circ \mathscr{A} : V \to Z$ na sljedeći način:

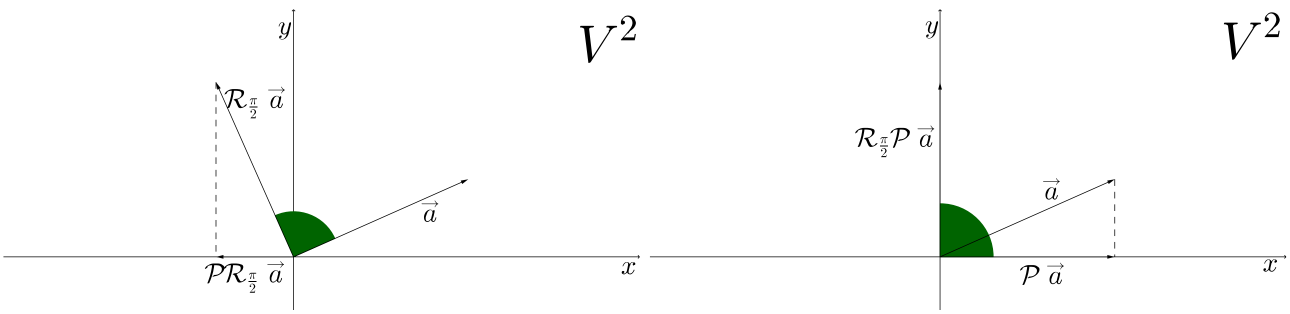
$$(\mathscr{B} \circ \mathscr{A})u = \mathscr{B}(\mathscr{A}u), \quad \forall u \in V.$$

Neposredno se može provjeriti da je $\mathscr{B}\circ\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to Z)$. Operator $\mathscr{B}\circ\mathscr{A}$ nazivamo proizvodom (ili superpozicijom) operatora $\mathscr{A}$ i $\mathscr{B}$. Umjesto $\mathscr{B} \circ \mathscr{A}$ često ćemo pisati $\mathscr{B}\mathscr{A}$.

Teorema 1.3.1. *Neka su V i W vektorski prostori nad poljem $\mathbb{P}$. Tada skup svih linearnih operatora $\mathcal{L}(V \to W)$ sa operacijama sabiranja i množenja operatora skalarom čini vektorski prostor nad poljem $\mathbb{P}$.*

Za dokaz je potrebno provjeriti aksiome vektorskog prostora. Napomenimo da je neutralni element za sabiranje operatora nula-operator $O \in \mathcal{L}(V \to W)$, koji dejstvuje na način: $Ou = \theta_W$, $\forall u \in V$.

Primjer 1.3.2. Neka su $\mathscr{R}, \mathscr{P} \in \mathcal{L}(R^2 \to R^2)$ operatori rotacije za ugao $\frac{\pi}{2}$ i projekcije na $x-$osu. Tada je moguće razmotriti dva proizvoda: $\mathscr{R}\mathscr{P}$ i $\mathscr{P}\mathscr{R}$. Imamo $\operatorname{Ker}\mathscr{R}\mathscr{P} = y -$ osa i $\operatorname{Im}\mathscr{R}\mathscr{P} = y -$ osa. Za operator $\mathscr{P}\mathscr{R}$ je $\operatorname{Ker}\mathscr{P}\mathscr{R} = x -$ osa i $\operatorname{Im}\mathscr{P}\mathscr{R} = x -$ osa.



Slika 1.3: Dejstvo operatora $\mathscr{P}\mathscr{R}_{\pi/2}$ i $\mathscr{R}_{\pi/2}\mathscr{P}$.

Teorema 1.3.3. *Neka su $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$ i $\mathscr{B} \in \mathcal{L}(W \to Z)$ linearni operatori. Tada važi:*

1. $\operatorname{rank}\mathscr{B}\mathscr{A} \leq \min\{\operatorname{rank}\mathscr{A}, \operatorname{rank}\mathscr{B}\}$;
2. $\operatorname{rank}\mathscr{A} = \dim W \Rightarrow \operatorname{rank}\mathscr{B}\mathscr{A} = \operatorname{rank}\mathscr{B}$;
3. $\operatorname{rank}\mathscr{B} = \dim W \Rightarrow \operatorname{rank}\mathscr{B}\mathscr{A} = \operatorname{rank}\mathscr{A}$.

Dokaz. 1. Kako je $\operatorname{Im}\mathscr{B}\mathscr{A} \subseteq \operatorname{Im}\mathscr{B}$, imamo $\dim\operatorname{Im}\mathscr{B}\mathscr{A} \leq \dim\operatorname{Im}\mathscr{B}$, tj. $\operatorname{rank}\mathscr{B}\mathscr{A} \leq \operatorname{rank}\mathscr{B}$. Dokažimo sada da je $\operatorname{rank}\mathscr{B}\mathscr{A} \leq \operatorname{rank}\mathscr{A}$. Neka je $W' = \operatorname{Im}\mathscr{A} \subseteq W$ i razmotrimo suženje operatora $\mathscr{B}$ na potprostor W', tj. $\mathscr{B}|_{W'}$. Primijetimo da je $\operatorname{Im}\mathscr{B}|_{W'} = \operatorname{Im}\mathscr{B}\mathscr{A}$, pa imamo

$$\operatorname{rank}\mathscr{B}\mathscr{A} = \dim\operatorname{Im}\mathscr{B}\mathscr{A} = \dim\operatorname{Im}\mathscr{B}|_{W'} \leq \dim W' = \dim\operatorname{Im}\mathscr{A} = \operatorname{rank}\mathscr{A}.$$

2. Neka je $\operatorname{rank}\mathscr{A} = \dim W$. Tada je $\operatorname{Im}\mathscr{A} = W$ i $\operatorname{Im}\mathscr{B}\mathscr{A} = \operatorname{Im}\mathscr{B}$, pa je $\operatorname{rank}\mathscr{B}\mathscr{A} = \operatorname{rank}\mathscr{B}$.

3. Neka je $\operatorname{rank}\mathscr{B} = \dim W$. Tada je $\operatorname{defect}\mathscr{B} = 0$, a to znači da je operator $\mathscr{B}$ jednoznačan i prema tome preslikava linearno nezavisan sistem vektora u linearno nezavisan sistem vektora. Neka je $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ baza prostora V. Odaberimo $k = \operatorname{rank}\mathscr{A}$ vektora tako da je $\{\mathscr{A}u_{i_1}, \mathscr{A}u_{i_2}, \ldots, \mathscr{A}u_{i_k}\} \subseteq W$ baza za $\operatorname{Im}\mathscr{A}$. Kako je slika ovog sistema linearno nezavisan sistem $\{\mathscr{B}\mathscr{A}u_{i_1}, \mathscr{B}\mathscr{A}u_{i_2}, \ldots, \mathscr{B}\mathscr{A}u_{i_k}\}$, imamo $\operatorname{rank}\mathscr{B}\mathscr{A} \geq k = \operatorname{rank}\mathscr{A}$. Kako na osnovu prvog dijela tvrđenja imamo obrnutu nejednakost, možemo zaključit da važi $\operatorname{rank}\mathscr{B}\mathscr{A} = \operatorname{rank}\mathscr{A}$. □

Primjer 1.3.4. Uz oznake iz prethodnog primjera imamo $\operatorname{rank}\mathscr{R}\mathscr{P} = 1$, dok je $\operatorname{rank}\mathscr{P} = 1$ i $\mathscr{R} = 2$.

1.4 Obratni operator

U ovoj sekciji ćemo razmatrati operatore koji preslikavaju vektorski prostor V u sebe, dakle razmatramo operatore koji pripadaju prostoru $\mathcal{L}(V \to V)$.

Definicija 1.4.1. Operator $\mathscr{I} \in \mathcal{L}(V \to V)$, $\mathscr{I}u = u$, $\forall u \in V$ se naziva jediničnim operatorom ili operatorom identiteta na prostoru V.

Definicija 1.4.2. Operator $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$ se naziva invertibilnim, ako postoji $\mathscr{B} \in \mathcal{L}(V \to V)$ tako da je $\mathscr{B}\mathscr{A} = \mathscr{A}\mathscr{B} = \mathscr{I}$. Tada se $\mathscr{B}$ naziva obratnim operatorom operatoru $\mathscr{A}$.

Pokazaćemo jedinstvenost operatora $\mathscr{B}$ u gornjoj definiciji: ako je operator $\mathscr{A}$ invertibilan, njegov obratni operator je jedinstven. Naime, pretpostavimo da je pored $\mathscr{B}$ i operator $\mathscr{C} \in \mathcal{L}(V \to V)$ obratni za $\mathscr{A}$. Tada je

$$\mathscr{B} = \mathscr{I}\mathscr{B} = (\mathscr{C}\mathscr{A})\mathscr{B} = \mathscr{C}(\mathscr{A}\mathscr{B}) = \mathscr{C}\mathscr{I} = \mathscr{C}.$$

Teorema 1.4.3. *Neka je $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$. Sljedeći uslovi su ekvivalentni:*
(1) $\mathscr{A}$ je invertibilan operator;
(2) $\mathscr{A}$ je obostrano jednoznačan operator;
(3) $\operatorname{Ker}\mathscr{A} = \{\theta\}$, tj. $\operatorname{defect}\mathscr{A} = 0$;
(4) $\operatorname{Im}\mathscr{A} = V$, tj. $\operatorname{rang}\mathscr{A} = \dim V$.

Dokaz. (1) $\Rightarrow$ (2): Pretpostavimo da je $\mathscr{A}$ invertibilni operator, tj. neka postoji linearni operator $\mathscr{B}$ tako da je $\mathscr{B}\mathscr{A} = \mathscr{A}\mathscr{B} = \mathscr{I}$. Kako je $\mathscr{A}\mathscr{B} = \mathscr{I}$, za sve $y \in V$ postoji $x \in V$ tako da je $\mathscr{A}x = y$; naime, trebamo odabrati $x = \mathscr{B}y$ i tada imamo $\mathscr{A}x = \mathscr{A}\mathscr{B}y = \mathscr{I}y = y$. Ako je $\mathscr{A}x_1 = \mathscr{A}x_2$, tada je $\mathscr{B}\mathscr{A}x_1 = \mathscr{B}\mathscr{A}x_2 \Rightarrow \mathscr{I}x_1 = \mathscr{I}x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$. Dakle, operator $\mathscr{A}$ je zaista obostrano jednoznačan.

(2) $\Rightarrow$ (1): Pretpostavimo da je $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$ obostrano jednoznačno preslikavanje. Tada postoji inverzno preslikavanje $\mathscr{A}^{-1} : W \to V$. Kako je tada $\mathscr{A}^{-1}\mathscr{A} = \mathscr{A}\mathscr{A}^{-1} = \mathscr{I}$, dovoljno je još pokazati da je $\mathscr{A}^{-1}$ linearan operator. Naime, zbog jedinstvenosti obratnog operatora, tada možemo zaključiti da je $\mathscr{A}^{-1}$ obratni operator za $\mathscr{A}$. Pokažimo sada linearnost za $\mathscr{A}^{-1}$. Za $x, y \in V$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{P}$ imamo $\mathscr{A}(\alpha\mathscr{A}^{-1}x + \beta\mathscr{A}^{-1}y) = \alpha\mathscr{A}\mathscr{A}^{-1}x + \beta\mathscr{A}\mathscr{A}^{-1}y = \alpha x + \beta y$, pa je $\mathscr{A}^{-1}(\alpha x + \beta y) = \alpha\mathscr{A}^{-1}x + \beta\mathscr{A}^{-1}y$.

(2) $\Rightarrow$ (3): Ako je $\mathscr{A}$ obostarno jednoznačan, svaki vektor ima samo jednu obratnu sliku, pa i vektor $\theta \in V$. Ovo znači da se samo nula-vektor slika u nula-vektor, tj. $\operatorname{Ker}\mathscr{A} = \{\theta\}$.

(3) $\Leftrightarrow$ (4) jer je $\operatorname{defect}\mathscr{A} + \operatorname{rang}\mathscr{A} = \dim V$.

(4) $\Rightarrow$ (2): Neka je $\operatorname{Im}\mathscr{A} = V$. Tada je i $\operatorname{Ker}\mathscr{A} = \{\theta\}$. Trebamo pokazati da je operator $\mathscr{A}$ obostrano jednoznačan. Zbog pretpostavke o slici operatora, dovoljno je pokazati još da $\mathscr{A}x_1 = \mathscr{A}x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$. Naime, ako je $\mathscr{A}x_1 = \mathscr{A}x_2$, tada imamo $\mathscr{A}(x_1 - x_2) = \theta$, tj. $x_1 - x_2 \in \operatorname{Ker}\mathscr{A} = \{\theta\}$, pa je $x_1 - x_2 = \theta$ ili $x_1 = x_2$. □

Primjedba 1.4.4. Iz dokaza prethodne teoreme vidimo da je operator $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$ invertibilan ako i samo ako je $\mathscr{A}$ izomorfizam vektorskog prostora V, pri čemu je obratan operator za $\mathscr{A}$ inverzno preslikavanje $\mathscr{A}^{-1}$.

Definicija 1.4.5. Operator $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$ je singularan, ako je $\operatorname{Ker}\mathscr{A} \neq \{\theta\}$. Ako je $\operatorname{Ker}\mathscr{A} = \{\theta\}$, za operator $\mathscr{A}$ kažemo da je regularan.

Iz navedenog možemo izvesti narednu posljedicu.

Posljedica 1.4.6. *Neka je* $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$.

$\mathscr{A}$ *singularan* $\Leftrightarrow$ $\mathscr{A}$ *nije invertibilan* $\Leftrightarrow$ $\mathscr{A}$ *nije uzajamno jednoznačan* $\Leftrightarrow \operatorname{rank} \mathscr{A} < \dim V \Leftrightarrow \operatorname{defect} \mathscr{A} > 0$.

Primjer 1.4.7. (i) Za operator $\mathscr{R}_{\frac{\pi}{2}} \in \mathcal{L}(R^2 \to R^2)$ rotacije geometrijske ravni za ugao $\frac{\pi}{2}$ je lako vidjeti da je $\mathscr{R}_{\frac{\pi}{2}}^{-1} = \mathscr{R}_{-\frac{\pi}{2}}$.

(ii) Operator $\mathscr{P} \in \mathcal{L}(R^2 \to R^2)$ projekcije vektora na x-osu nema obratni operator, jer nije uzajamno jednoznačan.

(iii) Kako jezgro operatora $\mathscr{D} \in \mathcal{L}(M_n \to M_n)$ nije trivijalan potprostor, operator $\mathscr{D}$ nije invertibilan.

1.5 Matrica linearnog operatora

Neka je $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$ i neka je $v = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ baza u V, a $w = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ baza u W. Vektor $\mathscr{A} v_j \in W$ možemo razložiti po bazi prostora W na **jedinstven** način, tj. imamo

$$\mathscr{A} v_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} w_i, \quad j = \overline{1, n}.$$

Definicija 1.5.1. Matricom operatora $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$ u bazama v i w nazivamo matricu

$$A(v, w) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \ldots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{P}^{m \times n}.$$

Isatknimo da su kolone matrice linearnog operatora $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$ koordinatne reprezentacije vektora baze prostora V u bazi prostora W i da je prema tome format matrice jednak $m \times n = \dim W \times \dim V$.

Primjer 1.5.2. Neka je dat operator projekcije $\mathscr{P} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2)$ i izaberimo bazu $v = \{v_1, v_2\}$ u prostoru $\mathbb{R}^2$, gdje je $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $v_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Kako bismo našli matricu operatora u ovoj bazi, potrebno je naći slike svih vektora iz baze:

$$\mathscr{P} v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathscr{P} v_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dalje, potrebno je dobijene vektore razložiti po izabranoj bazi:

$$\mathscr{P} v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_{11} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_{21} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Odavde imamo:

$$\alpha_{11} - 4\alpha_{21} = 1,\ \alpha_{11} + 2\alpha_{21} = 0 \Rightarrow \alpha_{11} = \frac{1}{3},\ \alpha_{21} = -\frac{1}{6}.$$

Dobijene koeficijente α_{11}, α_{21} možemo upisati u prvu kolonu matrice.

Nastavimo sada sa slikom drugog vektora u bazi:

$$\mathscr{P}v_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_{12}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_{22}\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Tada je:

$$\alpha_{12} - 4\alpha_{22} = -4,\ \alpha_{12} + 2\alpha_{22} = 0 \Rightarrow \alpha_{12} = -\frac{4}{3},\ \alpha_{22} = \frac{2}{3}.$$

Matrica operatora $\mathscr{P}$ u bazi v je

$$P(v) = \begin{pmatrix} 1/3 & -4/3 \\ -1/6 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Sada nađimo matricu istog operatora u standardnoj bazi $e = \{e_1, e_2\}$, gdje je $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Prije svega imamo

$$\mathscr{P}e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1 = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 \quad \text{i} \quad \mathscr{P}e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2,$$

pa možemo zaključiti da je matrica operatora u bazi e:

$$P(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Primjer 1.5.3. Nađimo matricu operatora rotacije $\mathscr{R}_{\frac{\pi}{2}} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2)$ u standardnoj bazi $e = \{e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ u $\mathbb{R}^2$.

Lako je vidjeti da je

$$\mathscr{R}_{\frac{\pi}{2}}e_1 = e_2 = 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 \quad \text{i} \quad \mathscr{R}_{\frac{\pi}{2}}e_2 = -e_1 = -1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2,$$

pa imamo

$$R_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Primjer 1.5.4. Razmotrimo operator diferenciranja $\mathscr{D} \in \mathcal{L}(M_n \to M_n)$, i izaberimo u prostoru M_n bazu $v = \{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$. Imamo

$$\begin{aligned}
&\mathscr{D}1 = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + \cdots + 0 \cdot t^n; \\
&\mathscr{D}t = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot t + \cdots + 0 \cdot t^n; \\
&\mathscr{D}t^2 = 2t = 0 \cdot 1 + 2 \cdot t + 0 \cdot t^2 + \cdots + 0 \cdot t^n; \\
&\mathscr{D}t^3 = 3t^2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + +3 \cdot t^2 + \cdots + 0 \cdot t^n \\
&\vdots \\
&\mathscr{D}t^n = nt^{n-1} = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + \cdots + n \cdot t^{n-1} + 0 \cdot t^n.
\end{aligned}$$

Uvrštavajući dobijene koeficijente razlaganja redom u kolone, dobićemo matricu operatora $\mathscr{D}$ u izabranoj bazi

$$D(v) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Napomenimo da je matrica $D(v)$ formata $(n+1) \times (n+1)$.

Odredimo sada matricu istog operatora u drugoj bazi $w = \{1, t, \frac{t^2}{2!}, \frac{t^3}{3!}, \dots, \frac{t^n}{n!}\}$. Nađimo slike vektora baze i njihova razlaganja:

$$\begin{aligned}
&\mathscr{D}1 = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + \dots + 0 \cdot \frac{t^n}{n!}; \\
&\mathscr{D}t = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot t + \dots + 0 \cdot \frac{t^n}{n!}; \\
&\mathscr{D}\frac{t^2}{2!} = t = 0 \cdot 1 + 1 \cdot t + 0 \cdot \frac{t^2}{2!} + \dots + 0 \cdot \frac{t^n}{n!}; \\
&\mathscr{D}\frac{t^3}{3!} = \frac{t^2}{2} = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + 1 \cdot \frac{t^2}{2!} + \dots + 0 \cdot \frac{t^n}{n!}; \\
&\vdots \\
&\mathscr{D}\frac{t^n}{n!} = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + \dots + 1 \cdot \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + 0 \cdot \frac{t^n}{n!}.
\end{aligned}$$

Uvrstimo u kolone i dobijemo matricu u novoj bazi:

$$D(w) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Sada smo našli način da linearne operatore zapišemo uz pomoć matrica. Ovo je važno, budući da matrice možemo jednostavno zapisati i da imamo prilično znanja o njima. Ipak, vidimo da situacija nije tako jednostavna, budući da matrica operatora zavisi od izbora baze. Kako smo vidjeli na primjeru operatora projekcije, u različitim bazama njegove matrice izgledaju potpuno različito.

Podsjetimo da prema dogovoru operatore označavamo velikim latinskim pisanim slovima. Njihove matrice ćemo označavati odgovarajućim velikim štampanim slovima. Pri tome u zagradama ćemo pisati oznaku za bazu, kako bi bilo jasno da je matrica upravo u toj bazi. Recimo, ako je $\mathscr{D}$ operator diferenciranja, sa $D(v)$ ćemo označavati matricu tog operatora u bazi v. Naglasimo da ćemo oznaku za bazu izostavljati kada je jasno u kojoj bazi radimo.

Nakon što smo zaključili da matrica operatora zavisi od izbora baze, vidjećemo da matrica operatora ipak zadržava neke osobine tog operatora, bez obzira na izbor baze. Recimo, mogli smo primijetiti da u gore navedenim primjerima matrice istog operatora uvijek imaju isti rang i da je taj rang jednak rangu operatora. Naprimjer, obije matrice operatora projekcije imaju rang 1, matrica operatora rotacije je ranga 2, dok su obije matrice operatora diferenciranja ranga n. To nas navodi da formulišemo sljedeće tvrđenje.

Teorema 1.5.5. *Rang matrice $A(v, w)$ operatora $\mathscr{A}$ ne zavisi od izbora baza v i w i jednak je rangu operatora $\mathscr{A}$.*

Dokaz. Saglasno definiciji $\operatorname{rank} \mathscr{A} = \dim \operatorname{Im} \mathscr{A}$, a po Teoremi 1.2.6 je

$$\operatorname{Im} \mathscr{A} = \operatorname{Lin}\{\mathscr{A} v_1, \mathscr{A} v_2, \dots, \mathscr{A} v_n\},$$

pa je dakle $\operatorname{rank} \mathscr{A} = \dim \operatorname{Lin}\{\mathscr{A} v_1, \mathscr{A} v_2, \dots, \mathscr{A} v_n\}$. Po definiciji matrice linearnog operatora $A(v, w) = (\mathscr{A} v_1(w) \mathscr{A} v_2(w) \dots \mathscr{A} v_n(w))$, gdje je $\mathscr{A} v_j(w)$, $j = \overline{1, n}$, vektor koordinata za $\mathscr{A} v_j$ u bazi w. Kako je $\operatorname{rank} A(v, w)$ broj linearno nezavisnih kolona, tj. broj linearno nezavisnih vektora u sistemu $\{\mathscr{A} v_1, \mathscr{A} v_2, \dots, \mathscr{A} v_n\}$, imamo $\operatorname{rank} A(v, w) = \dim \operatorname{Lin}\{\mathscr{A} v_1, \mathscr{A} v_2, \dots, \mathscr{A} v_n\} = \operatorname{rank} \mathscr{A}$. □

Lema 1.5.6. *Neka su v i w baze u prostorima V i W, redom i $\mathscr{A}, \mathscr{B} \in \mathcal{L}(V \to W)$. Matrica operatora $\mathscr{A} + \mathscr{B}$ je $A(v, w) + B(v, w)$, a matrica operatora $\alpha \mathscr{A}$ je $\alpha A(v, w)$.*

Dokaz. Neka je $v = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ baza u V, a $w = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ baza u W i

$$\mathscr{A} v_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} w_i, \quad \mathscr{B} v_j = \sum_{i=1}^{m} \beta_{ij} w_i, \quad j = \overline{1, n}.$$

Tada je

$$(\mathscr{A} + \mathscr{B}) v_j = \sum_{i=1}^{m} (\alpha_{ij} + \beta_{ij}) w_i, \quad (\alpha \mathscr{A}) v_j = \sum_{i=1}^{m} (\alpha \alpha_{ij}) w_i, \quad j = \overline{1, n}.$$

Kako je matrica operatora jedinstvena, možemo zaključiti da je matrica operatora $\mathscr{A} + \mathscr{B}$ u izabranim bazama jednaka zbiru matrica $A(v, w) + B(v, w)$, a da je matrica operatora $\alpha \mathscr{A}$ jednaka $\alpha A(v, w)$. □

Teorema 1.5.7. *Dimenzija vektorskog prostora $\mathcal{L}(V \to W)$ je $\dim W \times \dim V$.*

Dokaz. Odaberimo baze v i w u prostorima V i W, redom. Tada svakom operatoru $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$ odgovara tačno jedna matrica $A(v, w)$ formata $\dim W \times \dim V$. Operacije sabiranja operatora i množenja operatora brojem odgovaraju operacijama sabiranja matrica i množenja matrica brojem. Dakle, vektorski prostor svih linearnih operatora $\mathcal{L}(V \to W)$ je izomorfan prostoru matrica formata $\dim W \times \dim V$. Kako izomorfni vektorski prostori imaju iste dimenzije, slijedi da je dimenzija vektorskog $\mathcal{L}(V \to W)$ jednaka $\dim W \cdot \dim V$. □

Teorema 1.5.8. *Neka su V, W i Z vektorski prostori nad poljem $\mathbb{P}$ i v, w i z baze u tim prostorima. Neka su $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$ i $\mathscr{B} \in \mathcal{L}(W \to Z)$ i $A(v, w)$ i $B(w, z)$ matrice operatora u izabranim bazama. Matrica superpozicije operatora $\mathscr{B}\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to Z)$ je proizvod matrica $B(w, z) A(v, w)$.*

Dokaz. Neka je $v = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ baza u V, $w = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ baza u W i $z = \{z_1, z_2, \ldots, z_l\}$ baza u prostoru Z. Neka su

$$A(v,w) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \ldots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{P}^{m\times n} \quad \text{i} \quad B(w,z) = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \ldots & \beta_{1l} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \ldots & \beta_{2l} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \ldots & \beta_{nl} \end{pmatrix} \in \mathbb{P}^{n\times l}$$

matrice operatora $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$ i $\mathscr{B} \in \mathcal{L}(W \to Z)$ u izabranim bazama. Tada je

$$\mathscr{A} v_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} w_i, \quad j = \overline{1,n}, \quad \mathscr{B} w_i = \sum_{k=1}^{l} \beta_{ki} z_i, \quad i = \overline{1,m},$$

pa imamo

$$\begin{aligned} (\mathscr{B}\mathscr{A})v_j = \mathscr{B}(\mathscr{A} v_j) = \mathscr{B}\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} w_i\right) &= \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \mathscr{B} w_i \\ = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \sum_{k=1}^{l} \beta_{ki} z_k &= \sum_{k=1}^{l} \left(\sum_{i=1}^{m} \beta_{ki}\alpha_{ij}\right) z_k, \quad j = \overline{1,n}. \end{aligned}$$

Dakle, matrica linearnog operatora $\mathscr{B}\mathscr{A}$ je zaista proizvod matrica $B(w,z)A(v,w)$. □

Primjedba 1.5.9. Na osnovu prethodne teoreme može se dati novi dokaz Teoreme 1.3.3 koji se oslanja na sličnom tvrđenju o rangu proizvoda matrica.

1.6 Transformacija matrice linearnog operatora pri prelasku na novu bazu

Pošto smo se u prethodnoj sekciji ubijedili da matrica operatora zavisi od izbora baze, vidjeli smo i to da ipak ne može bilo koja matrica biti matricom datog operatora. Matrice zadržavaju neka svojstva operatora, nezavisno od baze, recimo jedna takva invarijana je rang.

U ovoj sekciji ćemo se baviti pitanjem kako se mijenja matrica operatora prilikom zamjene baze. Počnimo od slučaja kada se osnovni prostor i prostor slika razlikuju, tj. kada je $\dim V \neq \dim W$, a kasnije ćemo razmotriti slučaj kada je $V = W$.

Lema 1.6.1. *Neka je $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$ i neka je $A(v,w)$ matrica operatora $\mathscr{A}$ u bazama $v = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ i $w = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ prostora V i W. Neka je $x \in V$ i neka je $x(v) \in \mathbb{P}^{n\times 1}$ koordinatna reprezentacija vektora x u bazi v. Tada za koordinatnu reprezentaciju vektora $y = \mathscr{A} x \in W$ u bazi w važi $y(w) = A(v,w)x(v) \in \mathbb{P}^{m\times 1}$.*

Dokaz. Ako je $x = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j$ razlaganje vektora x po bazi v, tada je $x(v) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{P}^{n\times 1}$.

Neka je $A(v,w) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{P}^{m\times n}$ matrica linearnog operatora $\mathscr{A}$ u bazama v i w. Tada vektor $\mathscr{A}v_j \in W$ možemo razložiti po bazi prostora W:

$$\mathscr{A}v_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} w_i, \quad j = \overline{1,n}.$$

Sada imamo

$$y = \mathscr{A}x = \sum_{j=1}^{n} x_j \mathscr{A}v_j = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} w_i = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j \right) w_i.$$

Dakle,

$$y(w) = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{1j} x_j \\ \sum_{j=1}^{n} \alpha_{2j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} \alpha_{mj} x_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A(v,w)x(v).$$

□

Neka je $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$, v i v' baze u V, w i w' baze u W, a $A(v,w)$ i $A(v',w')$ su matrice operatora $\mathscr{A}$ u izabranim bazama.

Teorema 1.6.2. *Neka je $S \in \mathbb{P}^{n\times n}$ matrica prelaska iz baze v u v' i $Q \in \mathbb{P}^{m\times m}$ matrica prelaska iz w u w'. Tada je*

$$A(v,w)S = QA(v',w').$$

Dokaz. Neka je $x \in V$ i $y = \mathscr{A}x \in W$. Označimo sa $x(v)$ i $y(w)$ koordinate vektora x i y u bazama v i w, redom. Tada je

$$y(w) = A(v,w)x(v), \quad y(w') = A(v',v')x(v'). \tag{1.1}$$

Kako su S i Q matrice prelaska, imamo

$$x(v) = Sx(v'), \quad y(w) = Qy(w'). \tag{1.2}$$

Kombinujući (1.1) i (1.2), dobijamo:

$$Qy(w') = A(v,w)Sx(v').$$

Ako u posljednju jednakost uvrstimo drugu jednakost iz (1.1), nalazimo

$$QA(v',w')x(v') = A(v,w)Sx(v').$$

Kako je vektor x proizvoljan, iz posljednje jednakosti imamo

$$QA(v',w') = A(v,w)S,$$

a to je bilo potrebno da se pokaže. □

Teorema 1.6.3. *Neka je* $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$ *i* $\operatorname{rank} \mathscr{A} = r$. *Tada postoje baze* v *u* V *i* w *u* W, *tako da je*

$$A(v,w) = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} = G.$$

Dokaz. Neka je $A(v', w')$ matrica linearnog operatora $\mathscr{A}$ u nekim bazama v' i w'. Postoje regularne matrice P i Q takve da je:

$$A(v,w) = PGQ. \tag{1.3}$$

Izaberimo nove baze na sljedeći način: $v = v'Q^{-1}$ i $w = w'P$. Tada je

$$A(v,w)Q = P^{-1}A(v',w').$$

Ako uvrstimo posljednju jednakost u (1.3) proizilazi

$$A(v,w) = P^{-1}A(v',w')Q^{-1} = P^{-1}PGQQ^{-1} = G.$$

□

Posljedica 1.6.4. *Neka je* $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$. *Tada su sve matrice operatora* $\mathscr{A}$ *međusobno ekvivalentne i njihov rang je jednak rangu operatora* $\mathscr{A}$.

Sada razmotrimo slučaj kada operator djeluje iz prostora V u sebe. U tom slučaju nemamo slobodu izbora dvije baze, već samo jedne.

Teorema 1.6.5. *Neka je* $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$, *neka su* v *i* v' *dvije baza u* V *i* S *matrica prelaska, tj.* $v' = v \cdot S$. *Tada je*

$$A(v') = S^{-1}A(v)S.$$

Dokaz. Neka je x proizvoljan vektor iz V i $y = \mathscr{A}x \in V$. Tada je

$$y(v) = A(v)x(v), \quad y(v') = A(v')x(v'),$$

a takođe je $x(v) = Sx(v')$ i $y(v) = Sy(v')$. Kombinujući prethodne jednakosti dobijamo:

$$S^{-1}A(v)Sx(v') = A(v')x(v').$$

Kako je $x \in V$ proizvoljan vektor, iz posljednje jednakosti slijedi $S^{-1}A(v)S = A(v')$, a to je tvrđenje naše teoreme. □

Definicija 1.6.6. Matrice P i Q formata $n \times n$ su slične, ako postoji regularna matrica $S \in \mathbb{P}^{n\times n}$ takva da je $P = S^{-1}QS$.

Posljedica 1.6.7. *Matrice operatora* $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$ *u različitim bazama su međusobno slične.*

Teorema 1.6.8. *(i) Ako su matrice* A *i* A' *slične, tada važi* $\det A' = \det A$.
(ii) Važi $\det(A - tI) = \det(A' - tI)$, $\forall t \in \mathbb{P}$ *(*I *je jedinična matrica).*

Proof. Kako je $\det A' = \det(S^{-1}AS) = \det(S^{-1})\det(A)\det(S) = \det(S)^{-1}\det(A)\det(S) = \det A$ imamo prvi dio tvrđenja. Iz jednakosti $A' = S^{-1}AS$ slijedi da za sve skalare $t \in \mathbb{P}$ imamo $A' - tI = S^{-1}(A - tI)S$, pa drugi dio našeg tvrđenja slijedi iz prvog dijela. □

Definicija 1.6.9. Determinantom linearnog operatora $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$ se naziva $\det A(e)$.
Oznaka: $\det \mathscr{A}$ označava determinantu operatora $\mathscr{A}$.

Imajući u vidu prethodno tvrđenje, definicija koju smo upravo naveli je korektna, jer, saglasno svojstvima sličnih matrica, determinanta matrice operatora ne zavisi od izbora baze. Dakle, nije važno koja konkretno baza je izabrana u prethodnoj definiciji.

Konačno, zaključujemo da je, i pored određenih nijansi, situacija sa operatorima iz V u V analogna situaciji sa kvadratnim matricama. Između ostalog, uz zaključak na kraju Sekcije 4.4 možemo dodati i sljedeće:

Napomena 1.6.10. Neka je $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$. Tada je $\det \mathscr{A} = 0$ ako i samo ako je operator $\mathscr{A}$ singularan.

Primjer 1.6.11. Operator $\mathscr{R}_{\frac{\pi}{2}} \in \mathcal{L}(R^2 \to R^2)$ je regularan ($\det \mathscr{R}_{\frac{\pi}{2}} = 1$), dok je operator $\mathscr{D} \in \mathcal{L}(M_n \to M_n)$ singularan.

Zadatak 1.6.12. Vratimo se na primjer operatora projekcije $\mathscr{P}$ iz prethodne sekcije koji je singularan. Provjeriti da za matrice

$$P(v) = \begin{pmatrix} 1/3 & -4/3 \\ -1/6 & 2/3 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad P(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

važi da je $P(v) = S^{-1}P(e)S$, gdje je S matrica prelaska iz baze v u standardnu bazu e u $\mathbb{R}^2$.

Glava 2

Spektralna teorija linearnih operatora u konačnodimenzionalnom prostoru

U ovoj glavi razmatraćemo linearne operatore koji preslikavaju jedan vektorski prostor u sebe i za takve operatore ćemo definisati važne pojmove: svojstvena vrijednost operatora, svojstveni vektor operatora i karakteristični polinom.

2.1 Invarijantni potprostori

Definicija 2.1.1. Neka je V vektorski prostor i $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$. Potprostor $U \subseteq V$ je invarijantni potprostor za $\mathscr{A}$ ako je $\mathscr{A}u \in U$, $\forall u \in U$, odnsno ako je $\mathscr{A}(U) \subseteq U$.

Primjer 2.1.2. (i) $\{0\}$ i V su invarijantni potrostori svakog operatora $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$. Za ova dva invarijantna potprostora kažemo da su trivijalni invarijantni potprostori;

(ii) $\operatorname{Ker}\mathscr{A}$ je invarijantan potprostor za $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$, jer za sve $u \in \operatorname{Ker}\mathscr{A}$ važi $\mathscr{A}u = \theta \in \operatorname{Ker}\mathscr{A}$;

(iii) $\operatorname{Im}\mathscr{A}$ je invarijantan potprostor, jer je za sve $u \in \operatorname{Im}(\mathscr{A})$ ispunjeno $\mathscr{A}u \in \operatorname{Im}(\mathscr{A})$.

Primjer 2.1.3. (i) Operator rotacije u geometrijskoj ravni $\mathscr{R}_{\frac{\pi}{2}} \in \mathcal{L}(R^2 \to R^2)$ ima samo dva trivijalna invarijantna potprostora.

(ii) Operator projekcije na x-osu $\mathscr{P} \in \mathcal{L}(R^2 \to R^2)$ ima 4 invarijantna potprostora i to: dva trivijalna invarijantna potprostora: $\{\theta\}$ i R^2, x-osa$=\operatorname{Im}\mathscr{P}$ i y-osa$=\operatorname{Ker}\mathscr{P}$.

(iii) Za operator rotacije u geometrijskoj ravni $\mathscr{R}_{\pi} \in \mathcal{L}(R^2 \to R^2)$ svi potprostori su invarijantni.

(iv) Potprostori $M_k \subseteq M_n$, $k = \overline{0, n}$ su invarijantni potprostori za operator diferenciranja $\mathscr{D} \in \mathcal{L}(M_n \to M_n)$.

Primjer 2.1.4. Operator projekcije $\mathscr{P} \in \mathcal{L}(R^2 \to R^2)$ na x-osu u geometrijskoj ravni R^2 ima dva netrivijalna invarijantna potprostora $x -$ osa i $y -$ osa. Čitav prostor R^2 je direktna suma ova dva potprostora: $R^2 = x - \text{osa} \oplus y - \text{osa}$. Izaberimo baze u ova dva jednodimenzionalna potprostora: $\vec{e}_1 \in x -$ osa i $\vec{e}_2 \in y -$ osa. Za bazu u R^2 uzmimo uniju ove dvije baze, tj. $e = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. Tada je matrica operatora u izabranoj bazi $P(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ovo je bločni oblik matrice, sa dva bloka $A_1 = (1)$ i $A_2 = (0)$.

Primjedba 2.1.5. Pretpostavimo da operator $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$ ima netrivijalni invarijantni potprostor $U \subseteq V$. Neka je $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ baza potprostora U i dopunimo je do baze $= u\{u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n\}$ prostora V. Razmotrićemo slike baznih vektora. Kako je $u_1 \in U$, a U invarijantni potprostor operatora $\mathscr{A}$, imamo $\mathscr{A}u_1 \in U$. Ovo znači da taj vektor može predstaviti kao linearna kombinacija sistema vektora $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$, tj. imamo

$$\mathscr{A}u_1 = \alpha_{11}u_1 + \cdots + \alpha_{k1}u_k + 0 \cdot u_{k+1} + \cdots + 0 \cdot u_n.$$

Kako i vektori $\mathscr{A}u_2, \dots, \mathscr{A}u_k$ pripadaju potprostoru U, imamo

$$\begin{cases} \mathscr{A}u_2 = \alpha_{12}u_1 + \cdots + \alpha_{k2}u_k + 0 \cdot u_{k+1} + \cdots + 0 \cdot u_n \\ \vdots \\ \mathscr{A}u_k = \alpha_{1k}u_1 + \cdots + \alpha_{kk}u_k + 0 \cdot u_{k+1} + \cdots + 0 \cdot u_n \end{cases}$$

Međutim, za preostale bazne vektore $u_{k+1}, u_{k+2}, \dots, u_n$ ne možemo tvrditi isto, jer oni ne pripadaju invarijantnom potprostoru U.

Prema tome, matrica operatora $\mathscr{A}$ u bazi u je

$$A(u) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1k} & \alpha_{1,k+1} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2k} & \alpha_{2,k+1} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \dots & \alpha_{kk} & \alpha_{k,k+1} & \dots & \alpha_{kn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{k+1,k+1} & \dots & a_{k+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{n,k+1} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Dobijena matrica $A(u)$ sadrži blok-matricu formata $(n-k) \times (n-k)$ koja se sastoji od nula.

Dakle, ukoliko imamo netrivijalni invarijantni potprostor U operatora, tada možemo izabrati bazu vektorskog prostora na način da matrica operatora u toj bazi ima jednostavniji oblik.

Primjedba 2.1.6. Prethodno razmatranje pokušajmo sada da uopštimo.

Pretpostavimo da prostor V možemo napisati kao direktnu sumu $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_s$, pri čemu su potprostori $U_1, U_2, \dots, U_s$ invarijantni za operator $\mathscr{A}$. Tada postoji baza prostora V tako da matrica operatora $\mathscr{A}$ u toj bazi ima još jednostavniji oblik. Naime, izaberimo baze u invarijantnim potprostorima: neka je $\{u_1, u_2, \dots u_{p_1}\}$ baza u U_1, neka je $\{u_{p_1+1}, u_{p_1+2}, \dots, u_{p_2}\}$ baza u U_2, itd. Na kraju, neka je $\{u_{p_{s-1}+1}, u_{p_{s-1}+2}, \dots, u_{p_s}\}$ baza u U_s. Kako je suma direktna, sistem vektora $u = \{u_1, \dots, u_{p_1}, u_{p_1+1}, \dots, u_{p_2}, \dots, u_{p_{s-1}+1}, \dots, u_{p_s}\}$ je baza prostora V ($p_s = n = \dim V$).

Kako je U_1 invarijantan potprostor za $\mathscr{A}$, budući da $u_j \in U_1$, imamo $\mathscr{A}u_j \in U_1$, $j = \overline{1, p_1}$. Zato se ovi vektori razlažu po bazi u potprostora U_1, tj. imamo

$$\mathscr{A}u_j = \alpha_{j1}u_1 + \cdots + \alpha_{jp_1}u_{p_1} + 0 \cdot u_{p_1+1} + \cdots + \cdots + 0 \cdot u_{p_s}, \quad j = \overline{1, p_1}.$$

Dalje, kako se vektori $u_{p_1+1}, \dots, u_{p_2} \in U_2$ preslikavaju u vektore iz potprostora U_2, njihove slike se razlažu po bazi tog potprostora. Dakle,

$$\mathscr{A}u_j = 0 \cdot u_1 + \cdots + 0 \cdot u_{p_1} + \alpha_{j,p_1+1}u_{p_1+1} + \cdots + \alpha_{j,p_2}u_{p_2} + 0 \cdot u_{p_2+1} + \cdots + \cdots + 0 \cdot u_{p_s},$$

za sve $j = p_1 + 1, \dots, p_2$.

Isti proces možemo sprovesti i za preostale vektore u bazama potprostora $U_3, U_4, \dots, U_s$.

Konačno, zaključujemo da u bazi u matrica operatora $\mathscr{A}$ ima sljedeći "bločni" oblik:

$$A(u) = \begin{pmatrix} A_1 & O & \dots & O \\ O & A_2 & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \dots & A_s \end{pmatrix}.$$

Ovdje su sa O označene podmatrice koje se sastoje isključivo od nula (ali nijesu sve obavezno istog formata), dok je, recimo, $A_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1p_1} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2p_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{p_11} & \alpha_{p_12} & \dots & \alpha_{p_1p_1} \end{pmatrix}$.

2.2 Svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori linearnog operatora

Definicija 2.2.1. Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{P}$. Vektor $x \neq 0$ je svojstveni vektor operatora $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$, ako postoji $\lambda \in \mathbb{P}$ tako da je $\mathscr{A}x = \lambda x$. Skalar λ se naziva svojstvenom vrijednošću operatora $\mathscr{A}$. Spektar operatora $\mathscr{A}$ je skup svih njegovih svojstvenih vrijednosti.

Napomena 2.2.2. U matematičkoj literaturi na engleskom jeziku se za svojstvene vrijednosti vrijednosti i svojstvene vektore koriste termini *eigenvalues* i *eigenvectors*. (Koristi se njemačka riječ *eigen* = svoj, svojstveni.)

Primjer 2.2.3. (i) Operator $\mathscr{R}_{\frac{\pi}{2}} \in \mathcal{L}(R^2 \to R^2)$ rotacije za ugao $\frac{\pi}{2}$ u geometrijskoj ravni nema svojstvenih vrijednosti.

(ii) Operator $\mathscr{R}_{\pi} \in \mathcal{L}(R^2 \to R^2)$ rotacije za ugao π u R^2 ima svojstvenu vrijednost $\lambda = -1$. Svi vektori prostora R^2 su svojstveni vektori ovog operatora.

(iii) Operator $\mathscr{P} \in \mathcal{L}(R^2 \to R^2)$ projekcije na x-osu u R^2 ima svojstvenu vrijednost $\lambda = 1$. Svojstveni vektori koji odgovaraju svojstvenoj vrijednosti $\lambda = 1$ su svi vektori na osi $x-$osi. Takođe, $\lambda = 0$ je svojstvena vrijednost ovog operatora, a svojstveni vektori koji joj odgovaraju su svi vektori na y-osi.

(iv) Operator $\mathscr{D} \in \mathcal{L}(M_n \to M_n)$ diferenciranja na prostoru M_n ima jedinstvenu svojstvenu vrijednost $\lambda = 0$. Svojstveni vektori koji odgovaraju ovoj svojstvenoj vrijednosti su konstantni polinomi.

Primjer 2.2.4. (i) Svi vektori iz $\operatorname{Ker}\mathscr{A} \neq \{\theta\}$ (izuzev nula-vektora) su svojstveni vektori operatora $\mathscr{A}$ koji odgovaraju svojstvenoj vrijednosti $\lambda = 0$, budući da $x \in \operatorname{Ker}\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{A}x = 0 = 0 \cdot x$.

(ii) Ako je x svojstveni vektor operatora $\mathscr{A}$ za svojstvenu vrijednost λ i $\alpha \in \mathbb{P}$, $\alpha \neq 0$, tada je vektor αx takođe svojstveni vektor operatora $\mathscr{A}$ za svojstvenu vrijednost λ. Zaista, $\mathscr{A}(\alpha x) = \alpha\mathscr{A}x = \alpha(\lambda x) = \lambda(\alpha x)$.

(iii) Ako je x svojstveni vektor za $\mathscr{A}$, lako je pokazati da je $\mathrm{Lin}\{x\} = \{\alpha x : \alpha \in \mathbb{P}\}$ jednodimenzionalni invarijantni potprostor za $\mathscr{A}$.

(iv) Ako je x svojstveni vektor operatora $\mathscr{A}$ za svojstvenu vrijednost λ, tada je x svojstveni vektor operatora $\mathscr{A}^2$ za svojstvenu vrijednost λ^2.

Teorema 2.2.5. *Sistem svojstvenih vektora koji odgovaraju međusobno različitim svojstvenim vrijednostima operatora je linearno nezavisan.*

Dokaz. Dokaz ćemo izvesti indukcijom prema broju svojstvenih vektora operatora $\mathscr{A}$.

Ako je $\{x_1\}$ sistem od jednog svojstvenog vektora operatora $\mathscr{A}$, tada je $x_1 \neq 0$, prema samoj definiciji, pa je riječ o linearno nezavisnom sistemu.

Pretpostavimo da je iskaz u teoremi tačan za sistem koji ima m svojstvenih vektora koji odgovaraju međusobno različitim svojstvenim vrijednostima operatora $\mathscr{A}$. Pretpostavimo sada da je $\{x_1, \dots, x_m, x_{m+1}\}$ sistem svojstvenih vektora operatora $\mathscr{A}$ koji odgovaraju svojstvenim vrijednostima $\lambda_1, \dots, \lambda_m, \lambda_{m+1}$, gdje je $\lambda_i \neq \lambda_j$ za sve različite $i, j = \overline{1, m+1}$, odnosno neka je $\mathscr{A} x_j = \lambda_j x_j$, $j = \overline{1, m+1}$. Potrebno je dokazati da je sistem vektora $\{x_1, \dots, x_m, x_{m+1}\}$ linearno nezavisan.

Neka je $\sum_{j=1}^{m+1} \alpha_j x_j = \theta$. Tada imamo

$$\mathscr{A}(\sum_{j=1}^{m+1} \alpha_j x_j) = \theta \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{m+1} \alpha_j \mathscr{A} x_j = \theta \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{m+1} (\alpha_j \lambda_j) x_j = \theta.$$

Slijedi

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{m+1} (\alpha_j \lambda_j) x_j - \lambda_{m+1} \sum_{j=1}^{m+1} \alpha_j x_j = \theta &\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{m+1} (\alpha_j \lambda_j - \lambda_{m+1} \alpha_j) x_j = \theta \\ &\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{m} (\alpha_j \lambda_j - \lambda_{m+1} \alpha_j) x_j = \theta. \end{aligned}$$

Kako je sistem vektora $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ linearno nezavisan prema pretpostavci indukcije, imamo $\alpha_j(\lambda_j - \lambda_{m+1}) = 0$, $j = \overline{1, m}$. Kako su svojstvene vrijednosti međusobno različite, biće $\lambda_j - \lambda_{m+1} \neq 0$, a to povlači $\alpha_j = 0$, $j = \overline{1, m}$. Sada se jednakost $\sum_{j=1}^{m+1} \alpha_j x_j = \theta$ svodi na $\alpha_{m+1} x_{m+1} = 0$. Budući da je $x_{m+1} \neq 0$, imamo $\alpha_{m+1} = 0$. Dakle, dobili smo $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = \alpha_{m+1} = 0$, što dokazuje da je sistem vektora $\{x_1, \dots, x_m, x_{m+1}\}$ linearno nezavisan. $\square$

Posljedica 2.2.6. *Linearni operator $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$ može imati najviše $n = \dim V$ različitih svojstvenih vrijednosti.*

Primjedba 2.2.7. Pretpostavimo da $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$ ima $n = \dim V$ linearno nezavisnih svojstvenih vektora $x_1, x_2, \dots, x_n$ i neka je $\mathscr{A} x_1 = \lambda_1 x_1, \mathscr{A} x_2 = \lambda_2 x_2, \dots, \mathscr{A} x_n = \lambda_n x_n$. Tada je

$$\begin{cases} \mathscr{A} x_1 = \lambda_1 x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + \cdots + 0 \cdot x_n; \\ \mathscr{A} x_2 = 0 \cdot x_1 + \lambda_2 x_2 + 0 \cdot x_3 + \cdots + 0 \cdot x_n; \\ \vdots \\ \mathscr{A} x_n = 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + \cdots + \lambda_n x_n. \end{cases} \tag{2.1}$$

Vidimo da je matrica operatora $\mathscr{A}$ u bazi $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ dijagonalna, tj.

$$A(x) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Definicija 2.2.8. Govorićemo da je $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$ operator proste strukture, ako u prostoru V postoji baza od svojstvenih operatora $\mathscr{A}$.

Iz Teoreme 2.2.5 slijedi

Posljedica 2.2.9. *Ako operator $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$ ima $n = \dim V$ različitih svojstvenih vrijednosti, operator $\mathscr{A}$ je proste strukture.*

Primjer 2.2.10. (i) Operator $\mathscr{P} \in \mathcal{L}(R^2 \to R^2)$ je proste strukture, jer ima dvije različite svojstvene vrijednosti $(2 = \dim R^2)$.

(ii) Operator $\mathscr{R}_\pi \in \mathcal{L}(R^2 \to R^2)$ je takođe proste strukture, iako ima samo jednu svojstvenu vrijednost.

(iii) Operator $\mathscr{D} \in \mathcal{L}(M_n \to M_n)$ za $n \geq 1$ nije proste strukture (ima samo jedan linearno nezavisni svojstveni vektor).

(iv) Operator $\mathscr{R}_{\frac{\pi}{2}} \in \mathcal{L}(R^2 \to R^2)$ nije proste strukture (jer uopšte nema svojstvenih vektora).

2.3 Karakteristični polinom operatora

U prethodnoj sekciji smo uveli veoma važne pojmove svojstvene vrijednosti i svojstvenog vektora linearnog operatora. Međutim, nismo ukazali način na koji se u opštem slučaju mogu naći svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori. Ova sekcija će biti posvećena tom važnom pitanju.

Ipak, da bi se materijal koji slijedi bolje razumio, potrebno je znati neke činjenice iz Opšte algebre o polinomima, njihovim korijenima i slično. Stoga ćemo se najprije kratko upoznati sa ovim činjenicama.

Definicija 2.3.1. Neka je $p(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0$ polinom sa koeficijentima $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ iz polja $\mathbb{P}$, $a_n \neq 0$. Korijenom, ili nulom, polinoma $p(t)$ se naziva svako rješenje jednačine $p(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0 = 0$.

Definicija 2.3.2. Polje $\mathbb{P}$ se naziva kompletnim, ako svaki polinom stepena ≥ 1 sa koeficijentima iz $\mathbb{P}$ ima bar jedan korijen u polju $\mathbb{P}$.

Primjer 2.3.3. Polje $\mathbb{R}$ nije kompletno, jer recimo polinom $p(t) = t^2 + 1$ nema korijen u $\mathbb{R}$.

Činjenica da polje $\mathbb{R}$ nije kompletno čini neophodnim da uvedemo kompleksne brojeve. Za nas je važna teorema koja tvrdi da je polje kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ kompletno. Ova teorema nosi naziv "Osnovna teorema algebre". Ona se može dokazati na različite načine, ali nijedan od tih dokaza nije jednostavan. Budući da ova teorema nije predmet proučavanja Linearne algebre, mi ćemo je ovdje formulisati bez dokaza.

Teorema 2.3.4 (Osnovna teorema algebre)**.** *Svaki polinom stepena* ≥ 1 *sa koeficijentima u* $\mathbb{C}$ *ima korijen u* $\mathbb{C}$. *Drugim riječima, polje* $\mathbb{C}$ *je kompletno.*

Primjedba 2.3.5. Ako je $\lambda \in \mathbb{P}$ korijen polinoma $p(t) = a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$ stepena n (tj. $a_n \neq 0$), tada je polinom $p(t)$ dijeliv sa $t - \lambda$ i količnik ova dva polinoma $(a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0) : (t - \lambda)$ je polinom stepena $n - 1$.

Definicija 2.3.6. Neka je λ korijen polinoma $p(t) = a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$, $a_n \neq 0$. Tada je kratnost korijena λ najveći cijeli broj k takav da je $(t - \lambda)^k$ djelilac polinoma $p(t)$.

Primjer 2.3.7. (i) Polinom $t^2 - 2t + 1$ ima korijen 1 kratnosti 2.
(ii) Polinom t^5 ima korijen 0 kratnosti 5.

Lema 2.3.8. *Svaki polinom stepena* n *sa koeficijentima iz* $\mathbb{C}$ *ima* n *korijena, računajući njihovu kratnost.*

Dokaz. Tvrđene je dovoljno pokazati za polinome oblika $p(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$ sa koeficijentima $a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$. Na osnovu Osnovne teoreme algebre, postoji korijen $\lambda \in \mathbb{C}$. Ako polinom $p(t)$ podijelimo sa $t - \lambda$, dobijamo polinom $g(t)$ stepena $n - 1$. Po Osnovnoj teoremi algebre polinom $g(t)$ takođe ima korijen u $\mathbb{C}$. Produžavajući postupak, dobijamo n korijena u $\mathbb{C}$, računajući njihovu kratnost. $\square$

Pošto smo se upoznali sa nekim pojmovima i teoremama iz Opšte algebre, vratimo se pitanju nalaženja svojstvenih vrijednosti i svojstvenih vektora linearnog operatora.

Definicija 2.3.9. Karakterističnim polinomom operatora $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$ nazivamo polinom

$$\chi_{\mathscr{A}}(t) = \det(\mathscr{A} - t\mathscr{I})$$

čiji je stepen $n = \dim V$.

Teorema 2.3.10. *Neka je* V *vektorski prostor nad poljem* $\mathbb{P}$. *Skalar* $\lambda \in \mathbb{P}$ *je svojstvena vrijednost operatora* $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$ *ako i samo ako je* λ *korijen karakterističnog polinoma* $\chi_{\mathscr{A}}(t)$ *operatora* $\mathscr{A}$, *tj. ako je* λ *rješenje jednačine* $\chi_{\mathscr{A}}(\lambda) = 0$.

Dokaz. $\lambda \in \mathbb{P}$ je svojstvena vrijednost operatora $\mathscr{A}$ $\Leftrightarrow$ postoji $x \in V$, $x \neq \theta$ tako da je $\mathscr{A}x = \lambda x \Leftrightarrow \mathscr{A}x - \lambda x = \theta \Leftrightarrow (\mathscr{A} - \lambda\mathscr{I})x = \theta \Leftrightarrow x \in \operatorname{Ker}(\mathscr{A} - \lambda\mathscr{I}) \Leftrightarrow \operatorname{defect}(\mathscr{A} - \lambda\mathscr{I}) > 0 \Leftrightarrow$ operator $\mathscr{A} - \lambda\mathscr{I}$ je singularan $\Leftrightarrow \chi_{\mathscr{A}}(\lambda) = \det(\mathscr{A} - \lambda\mathscr{I}) = 0 \Leftrightarrow \lambda$ je korijen karakterističnog polinoma operatora $\mathscr{A}$. $\square$

Primjedba 2.3.11. Izaberimo bazu v u V. Neka su $A(v)$ i I matrice operatora $\mathscr{A}$ i $\mathscr{I}$ u bazi v. Tada je $\det(\mathscr{A} - t\mathscr{I}) = \det(A(v) - tI)$. Iz svojstava sličnih matrica znamo da ova determinanta ne zavisi od izbora baze v. Dakle, da bismo našli karakteristični polinom operatora $\mathscr{A}$, potrebno je zapisati matricu ovog operatora u bilo kojoj bazi, oduzeti od nje matricu tI i izračunati determinantu dobijene matrice.

Primjer 2.3.12. (i) Razmotrimo operator projekcije $\mathscr{P} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2)$. Matrica operatora $\mathscr{P}$ u standardnoj bazi e je $P = P(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, pa je $P - tI = \begin{pmatrix} 1-t & 0 \\ 0 & -t \end{pmatrix}$. Dakle, karakteristični polinom operatora $\mathscr{P}$ je $\chi_{\mathscr{P}}(t) = \det(P - tI) = t^2 - t$. Svojstvene vrijednosti operatora $\mathscr{P}$ su korijeni njegovog karakterističnog polinoma, tj. rješenja jednačine $t^2 - t = 0$. Odavde nalazimo da $\mathscr{P}$ ima dvije svojstvene vrijednosti $\lambda_1 = 0$ i $\lambda_2 = 1$.

(ii) Matrica operator rotacije $\mathscr{R}_{\frac{\pi}{2}} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2)$ u standardnoj bazi je $R_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, pa je $R_{\frac{\pi}{2}} - tI = \begin{pmatrix} -t & -1 \\ 1 & -t \end{pmatrix}$. Slijedi $\det(R_{\frac{\pi}{2}} - tI) = t^2 + 1$. Dakle, $\chi_{\mathscr{R}}(t) = t^2 + 1$ je karakteristični polinom operatora $\mathscr{R}_{\frac{\pi}{2}}$. Kako jednačina $t^2 + 1 = 0$ nema rješenja u polju $\mathbb{R}$, operator $\mathscr{R}_{\frac{\pi}{2}}$ nema svojstvenih vrijednosti.

(iii) Za operator diferenciranja $\mathscr{D} \in \mathcal{L}(M_n \to M_n)$ imamo

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad D - tI = \begin{pmatrix} -t & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -t & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -t \end{pmatrix}.$$

Odavde, $\chi_{\mathscr{D}}(t) = (-t)^{n+1} = 0$. Dakle, $\mathscr{D}$ ima jedinstvenu svojstvenu vrijednost $\lambda = 0$.

Teorema 2.3.10 nam djelimično daje odgovor na pitanje s početka ove sekcije. Pozivajući se na ovu teoremu, možemo naći svojstvene vrijednosti bilo kojeg linearnog operatora (pod uslovom da umijemo računati korijene polinoma). Dakle, dobili smo sistematski odgovor na ovo pitanje, kojim možemo biti zadovoljni, posebno ako imamo u vidu da u složenijim slučajevima korijene polinoma možemo lako naći uz pomoć računara. Sada ostaje drugi dio pitanja s početka sekcije: kako naći svojstvene vektore linearnog operatora? Pokazuje se da se ovaj zadatak, nakon nalaženja svojstvenih vrijednosti, svodi na zadatak koji nam je veoma dobro poznat: homogeni sistem linearnih jednačina.

Pretpostavimo da smo za linearni operator $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$ našli njegovu svojstvenu vrijednost λ. Pogledajmo na koji način možemo naći svojstveni vektor x operatora $\mathscr{A}$, koji odgovara sopstvenoj vrijednosti λ. Iz jednakosti $\mathscr{A}x = \lambda x$ slijedi $(\mathscr{A} - \lambda\mathscr{I})x = \theta$. Izaberimo neku bazu v u V, tada prethodnu jednakost možemo zapisati u koordinatnom obliku

$$(A(v) - \lambda I)x = \theta, \tag{2.2}$$

gdje je I jedinična matrica, $A(v)$ poznata matrica, a λ poznat broj. Dakle, pitanje nalaženja svojstvenog vektora x smo sveli na rješavanje homogenog sistema linearnih jednačina (2.2). Naravno, ovaj zadatak uvijek ima trivijalno rješenje $x = \theta$, ali je nama potrebno netrivijalno rješenje, jer je svojstveni vektor (po definiciji) različit od nule.

Sada se postavlja važno pitanje da li sistem (2.2) uvijek ima netrivijalno rješenje. Kako bismo odgovorili na to pitanje, podsjetimo se da smo svojstvenu vrijednost λ našli iz uslova $\det(A(v) - \lambda I) = 0$, tj. tako da matrica $A(v) - \lambda I$ bude singularna. Sada iz Teoreme **??** slijedi da sistem (2.2) uvijek ima netrivijalno rješenje. To rješenje i jeste svojstveni vektor x operatora

$\mathscr{A}$. Dakle, sistem (2.2) ima netrivijalno rješenje samim tim što je λ svojstvena vrijednost za $\mathscr{A}$, ili, obratno, ako sistem (2.2) nema netrivijalno rješenje, to λ nije svojstvena vrijednost operatora $\mathscr{A}$.

Primjer 2.3.13. (i) Za $\mathscr{P} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2)$ smo odredili njegovu matricu u standarnoj bazi $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ i karakteristični polinom $\chi_{\mathscr{P}}(t) = t^2 - t$. Kako bismo našli svojstveni vektor koji odgovara svojstvenoj vrijednosti $\lambda_1 = 1$, riješimo sistem $(P - 1 \cdot I)x = \theta$, tj. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dobijamo da su svojstveni vektori koji odgovaraju svojstvenoj vrijednosti $\lambda_1 = 1$ svi vektori oblika $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$, tj. vektori sa x-ose. Za drugu svojstvenu vrijednost, $\lambda = 0$ potrebno je riješiti sistem $(P - 0 \cdot I)x = Px = \theta$, tj. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Svojstveni vektori koji odgovaraju svojstvenoj vrijednosti $\lambda_2 = 0$ su oblika $x = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}$, tj. vektori sa y-ose.

(ii) Za operator $D \in \mathcal{L}(M_n \to M_n)$ imamo jedinstvenu svojstvenu vrijednost $\lambda = 0$, pa je za nalaženje svojstvenog vektora potrebno riješiti sistem linearnih jednačina:

$$(D - 0 \cdot I)a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Rješenje ovog sistema su vektori sa koordinatama $a = \begin{pmatrix} a_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, tj. polinomi oblika $p(t) = a_0 =$ const.

Napomena 2.3.14. Još jednom naglasimo da smo u svim primjerima u ovoj sekciji mogli izabrati bilo koje druge baze i raditi sa matricama operatora u tim bazama, to ne bi uticalo na svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore, zahvaljujući svojstvima sličnih matrica. Mi smo birali standardne baze isključivo iz razloga što je računanje u tim bazama lakše.

2.4 Svojstveni potprostor linearnog operatora

Neka je $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$ i neka je λ svojstvena vrijednost operatora $\mathscr{A}$. Označimo sa

$$W_\lambda = \{v \in V : \mathscr{A}v = \lambda v\}$$

skup svih svojstvenih vektora operatora $\mathscr{A}$, koji odgovaraju svojstvenoj vrijednosti λ, pri čemu smo ovom skupu svojstvenih vektora pridružili i nula-vektor.

Teorema 2.4.1. *Skup W_λ je vektorski potprostor u V, invarijantan za operator $\mathscr{A}$.*

Dokaz. Neka su $v \in W_\lambda$ i $w \in W_\lambda$ proizvoljni vektori i neka je $\alpha \in \mathbb{P}$ proizvoljan skalar. Tada je $\mathscr{A}v = \lambda v$ i $\mathscr{A}w = \lambda w$. Slijedi $\mathscr{A}(v+w) = \mathscr{A}v + \mathscr{A}w = \lambda v + \lambda w = \lambda(v+w)$. Dakle, $v + w \in W_\lambda$. Sa druge strane je $\mathscr{A}(\alpha v) = \alpha\mathscr{A}v = \alpha(\lambda v) = \lambda(\alpha v)$, pa imamo i $\alpha v \in W_\lambda$. Ovim smo pokazali da je W_λ zaista vektorski potprostor u V.

Kako je $\mathscr{A}v = \lambda v \in W_\lambda$, $\forall v \in W_\lambda$, imamo da je potprostor W_λ invarijantan za $\mathscr{A}$. $\square$

Definicija 2.4.2. W_λ se naziva svojstvenim potprostorom operatora $\mathscr{A}$ koji odgovara svojstvenoj vrijednosti λ.

Teorema 2.4.3. *Ako je λ korijen karakterističnog polinoma operatora $\mathscr{A}$ kratnosti k, tada je $\dim W_\lambda \leq k$.*

Dokaz. Neka je $\dim W_\lambda = l$. Izaberimo bazu $\{w_1, w_2, \dots, w_l\}$ potprostora W_λ i dopunimo je do baze $w = \{w_1, \dots, w_l, w_{l+1}, \dots, w_n\}$ prostora V. Matrica operatora $\mathscr{A}$ u bazi w ima oblik (vidjeti Primjedbu iz Sekcije 5.1)

$$A(w) = \begin{pmatrix} P & Q \\ O & R \end{pmatrix},$$

gdje je matrica P formata $l \times l$ i dijagonalna:

$$P = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}.$$

Odavde imamo da je karakteristični polinom operatora $\mathscr{A}$ zadat sa:

$$\chi_{\mathscr{A}}(t) = \det(A(w) - tI) = (\lambda - t)^l \det(R - tI) = (\lambda - t)^l \phi(t),$$

gdje je $\phi(t) = \det(R - tI)$ polinom stepena $n - l$.

S druge strane, λ je korijen kratnosti k, pa je $\chi_{\mathscr{A}}(t) = (\lambda - t)^k \psi(t)$, pri čemu je $\psi(\lambda) \neq 0$. Dakle, $(\lambda - t)^l \phi(t) = (\lambda - t)^k \psi(t)$. Kako je $\psi(\lambda) \neq 0$ (dok $\phi(\lambda)$ može biti nula), zaključujemo da mora biti $l \leq k$. $\square$

Definicija 2.4.4. Kratnost korijena λ polinoma $\chi_{\mathscr{A}}(t)$ se naziva algebarskom kratnošću svojstvene vrijednosti λ. Dimenzija svojstvenog potprostora W_λ koji odgovara svojstvenoj vrijednosti λ se naziva geometrijskom kratnošću svojstvene vrijednosti λ.

Prema terminologiji iz prethodne definicije, Teorema 2.4.3 tvrdi da je geometrijska kratnost svojstvene vrijednosti manja ili jednaka od algebarske. U narednim primjerima ćemo vidjeti da je u nekim slučajevima geometrijska kratnost svojstvene vrijednosti jednaka algebarskoj, dok je u drugim strogo manja.

Primjer 2.4.5. (i) Svojstvene vrijednosti operatora projekcije $\mathscr{P} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2)$ su $\lambda_1 = 0$ i $\lambda_2 = 1$. Obije svojstvene vrijednosti su algebarske kratnosti 1. Svi svojstveni vektori koji odgovaraju svojstvenoj vrijednosti $\lambda_1 = 0$ su: $\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}$, pa je $\dim W_{\lambda_1} = 1$. Svi svojstveni vektori koji odgovaraju svojstvenoj vrijednosti $\lambda_2 = 0$ su: $\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$, pa je $\dim W_{\lambda_2} = 1$. Dakle, u ovom slučaju geometrijske i algebarske kratnosti svojstvenih vrijednosti su jednake.

(ii) Razmotrimo operator rotacije $\mathscr{R}_\pi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2)$ za ugao π. Matrica ovog operatora u standardnoj bazi e prostora $\mathbb{R}^2$ je $R_\pi(e) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, a njegov karakteristični polinom je $\chi_{\mathscr{R}}(t) = (t+1)^2$, pa je $\lambda_0 = -1$ svojstvena vrijednost kratnosti 2. Svojstveni vektori koji odgovaraju ovoj svojstvenoj vrijednosti su svi vektori u $\mathbb{R}^2$, pa je $\dim W_{\lambda_0} = 2$. Dakle, algebarska i geometrijska kratnost svojstvene vrijednosti -1 su jednake 2.

(iii) Za operator diferenciranja $\mathscr{D} \in \mathcal{L}(M_n \to M_n)$ karakteristični polinom je $\chi_{\mathscr{D}}(t) = (-1)^{n+1}t^{n+1}$, pa on ima jedinstvenu svojstvenu vrijednost $\lambda_0 = 0$. Algebarska kratnost ove svojstvene vrijednosti je $n+1$, a njoj odgovaraju svojstveni vektori (polinomi) oblika $p(t) = \text{const}$, pa je $\dim W_{\lambda_0} = 1$. Dakle, geometrijska kratnost svojstvene vrijednosti je 1. Ovaj primjer pokazuje da geometrijska kratnost svojstvene vrijednosti može biti strogo manja od algebarske.

Teorema 2.4.6. *Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$ i $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$. Tada postoji invarijantan potprostor za operator $\mathscr{A}$ dimenzije 1 ili 2.*

Dokaz. Pretpostavimo prvo da karakteristični polinom za $\mathscr{A}$ ima bar jedan korjen $\lambda \in \mathbb{R}$. Tada je λ svojstvena vrijednost za operator $\mathscr{A}$ i operator $\mathscr{A}$ ima invarijantan potprostor dimenizije 1; ako je x svojstveni vektor koji odgovara svojstvenoj vrijednosti λ, tada je $W = \{\alpha x : \alpha \in \mathbb{R}\}$ invarijantan potprostor operatora $\mathscr{A}$ čija je dimenzija 1.

Pretpostavimo sada da karakteristični polinom za operator $\mathscr{A}$ nema nulu u polju $\mathbb{R}$. Pokazaćemo da tada postoji invarijantni potprostor za $\mathscr{A}$ dimenzije 2.

Definisaćemo vektorski prostor V' nad poljem $\mathbb{C}$: vektori prostora V' su parovi vektora iz V, tj. $V' = \{(x,y) : x \in V, y \in V\}$. Sabiranje vektora u V' i množenje skalarom su određeni na sljedeći način $(x,y) + (x',y') = (x+x', y+y')$ i $(a+ib)(x,y) = (ax - by, ay + bx)$. Neposredno se može provjeriti da je V' vektorski prostor nad poljem $\mathbb{C}$.

Uzmimo sada u obzir operator $\mathscr{A}' : V' \to V'$; $\mathscr{A}'(x,y) = (\mathscr{A}x, \mathscr{A}y)$, $\forall (x,y) \in V'$. Lako je pokazati da je $\mathscr{A}'$ linearan operator, tj. $\mathscr{A}' \in \mathcal{L}(V' \to V')$. Kako je polje kompleksih brojeva algebarski zatvoreno, karakteristični polinom za operator $\mathscr{A}'$ ima bar jednu nulu, a to znači da postoji bar jedna svojstvena vrijednost $\alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ za $\mathscr{A}'$. Neka je (x,y) odgovarajući svojstveni vektor. Tada je $\mathscr{A}'(x,y) = (\alpha + i\beta)(x,y)$, tj. $(\mathscr{A}x, \mathscr{A}y) = (\alpha x - \beta y, \alpha y + \beta x)$. Iz ove jednakosti imamo $\mathscr{A}x = \alpha x - \beta y$ i $\mathscr{A}y = \alpha y + \beta x$. Primjetimo sada da su oba vektora x i y različita od nula-vektora. Naime, ako bi neki od njih bio jednak nula-vektoru, imali bi da je $\alpha \in \mathbb{R}$ svojstvena vrijednost za operatora $\mathscr{A}$, a to smo pretpostavkom isključili.

Neka je W potprostor u V generisan vektorima x i y, tj. neka je $W = \operatorname{Lin}\{x, y\}$. Tada je W invarijantan potprostor za $\mathscr{A}$ (njegova dimenzija naravno nije veća od 2). Naime, ako su μ

i ν proizvoljni skalari, tada imamo

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(\mu x+\nu y) &= \mu\mathscr{A}x+\nu\mathscr{A}y\\ &= \mu(\alpha x-\beta y)+\nu(\alpha y+\beta x)\\ &= (\alpha\mu+\beta\nu)x+(\alpha\nu-\beta\mu)y\in \mathrm{Lin}\{x,y\}.\end{aligned}$$

Pokazaćemo još da je sistem $\{x,y\}$ linearno nezavisan i da je prema tome $\dim W=2$. Primjetimo da mora biti $\beta\neq 0$, jer bi u suprotonom imali $\mathscr{A}x=\alpha x$, a kako je $x\neq\theta$ ponovo bi imali bi da je $\alpha\in\mathbb{R}$ svojstvene vrijednost operatora $\mathscr{A}$. Izjednačimo linearnu kombinaciju vektora x i y sa nula-vektorom, tj. neka je $\mu x+\nu y=\theta$, $\mu,\nu\in\mathbb{R}$. Ako djelujemo operatorom $\mathscr{A}$ na ovu jednakost, nalazimo $\mathscr{A}(\mu x+\nu y)=\mu\mathscr{A}x+\nu\mathscr{A}y=(\alpha\mu+\beta\nu)x+(\alpha\nu-\beta\mu)y=\theta$. Dakle, imamo $\mu x+\nu y=\theta$ i $(\alpha\mu+\beta\nu)x+(\alpha\nu-\beta\mu)y=\theta$. Prvu jednakost pomonožimo sa $-(\alpha\nu-\beta\mu)$, a drugu sa ν i potom ih saberimo. Lako dobijamo $\beta(\mu^2+\nu^2)x=0$. Kako je $\beta\neq 0$ i $x\neq 0$, imamo $\mu^2+\nu^2=0$, pa je $\mu=\nu=0$. Prema tome, sistem $\{x,y\}$ je zaista linearno nezavisan.

Ovim je teorema dokazana. Vidimo da u slučaju kada operator $\mathscr{A}$ ima svojstvenu vrijednost tada postoji invarijantni potprostor dimenzije 1, a ukoliko nema svojstvenih vrijednost, tada smo pokazali da postoji invarijantni potprostor dimenzije 2. □

2.5 Polinom od linearnog operatora. Teorema Hamiltona-Kejli

Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{P}$ i neka je $\mathscr{A}\in\mathcal{L}(V\to V)$.

Definicija 2.5.1. Izraz

$$p(\mathscr{A})=a_n\mathscr{A}^n+\alpha_{n-1}\mathscr{A}^{n-1}+\cdots+\alpha_2\mathscr{A}^2+\alpha_1\mathscr{A}+\alpha_0\mathscr{I},$$

gdje je $a_j\in\mathbb{P}$, $j=\overline{0,n}$, $a_n\neq 0$, se naziva polinomom stepena n od linearnog operatora $\mathscr{A}$.

Primijetimo da je polinom od operatora takođe linearni operator, tj. $p(\mathscr{A})\in\mathcal{L}(V\to V)$.

Teorema 2.5.2 (Hamilton-Kejli)**.** *Ako je $\mathscr{A}\in\mathcal{L}(V\to V)$, tada je $\chi_{\mathscr{A}}(\mathscr{A})\equiv\mathscr{O}$, tj. svaki linearni operator je korijen svog karakterističnog polinoma.*

Dokaz. Neka je

$$\chi_{\mathscr{A}}(t)=\det(\mathscr{A}-t\mathscr{I})=\alpha_0+\alpha_1 t+\cdots+\alpha_{n-1}t^{n-1}+(-1)^n t^n$$

karakteristični polinom opertora $\mathscr{A}$. Treba pokazati da $\chi(\mathscr{A})=\mathscr{O}$ (gdje je $\mathscr{O}$ je nula-operator).

Izaberimo bazu v u V i formirajmo matricu $A=A(v)$ operatora $\mathscr{A}$ u izabranoj bazi. Razmotrimo

$$A(t)=A-tI=\begin{pmatrix}\alpha_{11}-t & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-t & \dots & \alpha_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn}-t\end{pmatrix}$$

i formirajmo pridruženu (adjugovanu) matricu matrici $A(t)$:

$$B(t) = \begin{pmatrix} A_{11}(t) & A_{21}(t) & \dots & A_{n1}(t) \\ A_{12}(t) & A_{22}(t) & \dots & A_{n2}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n}(t) & A_{2n}(t) & \dots & A_{nn}(t) \end{pmatrix}.$$

Napomenimo da je $A_{ij}(t)$ algebarska dopuna elementa sa indeksima (j,i) matrice $A(t)$. Lako je zaključiti da su $A_{ij}(t)$ polinomi od t i to stepena $n-1$. Dakle, svi elementi matrice $B(t)$ su polinomi stepena $n-1$, pa se matrica $B(t)$ može zapisati na sljedeći način $B(t) = C_0 + C_1 t + \dots + C_{n-1}t^{n-1}$, gdje su $C_k \in \mathbb{P}^{n\times n}$, $k = \overline{0, n-1}$ matrice sastavljene od koeficijenata pored t^k u polinomima $A_{ij}(t)$. Iz svojstava pridruženih matrica imamo $A(t)B(t) = \det A(t) I$, tj.

$$(A - tI)(C_0 + C_1 t + \dots + C_{n-1}t^{n-1}) = (\alpha_0 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_{n-1}t^{n-1} + (-1)^n t^n)I.$$

Posljednja jednakost dva polinoma stepena n se može zapisati kao $n+1$ jednakosti koeficijenata pored svih stepena t^k, $k = 0, 1, \dots, n$:

$$\begin{aligned} AC_0 &= \alpha_0 I && (5.0)\\ AC_1 - C_0 &= \alpha_1 I && (5.1)\\ AC_2 - C_1 &= \alpha_2 I && (5.2)\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots && \\ AC_{n-1} - C_{n-2} &= \alpha_{n-1} I && (5.n-1)\\ -C_{n-1} &= (-1)^n I && (5.n) \end{aligned}$$

Ako jednakost u $(5.k)$ pomnožimo s lijeve strane sa matricom A^k, $k = \overline{0, n}$ i ako sve saberemo dobijamo

$$\begin{aligned} O &= AC_0 + A^2C_1 - AC_0 + A^3C_2 - A^2C_1 + \dots + A^nC_{n-1} - A^nC_{n-1} \\ &= \alpha_0 I + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \dots + \alpha_{n-1}A^{n-1} + (-1)^n A^n = \chi_{\mathscr{A}}(A). \end{aligned}$$

Dakle, pokazali smo da je $\chi_{\mathscr{A}}(A)$ nula-matrica. Jednakost $\chi_{\mathscr{A}}(\mathscr{A}) = \mathscr{O}$ slijedi iz činjenice da je $\operatorname{rank}\chi_{\mathscr{A}}(\mathscr{A}) = \operatorname{rank}\chi_{\mathscr{A}}(A)$. □

Primjer 2.5.3. Za operator projekcije $\mathscr{P} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2)$ karakteristični polinom je $\chi_{\mathscr{P}}(t) = t^2 - t$. Prema teorema Hamiltona-Kejli imamo da važi $\mathscr{P}^2 - \mathscr{P} = \mathscr{O}$, tj. $\mathscr{P}^2 = \mathscr{P}$. Nije teško vidjeti da operator projekcije zaista zadovoljava ovu jednakost. Takođe, možemo zapisati matricu P operatora $\mathscr{P}$ u nekoj bazi i uvjeriti se da važi matrična jednakost $P^2 - P = O$.

Glava 3

Žordanova forma linearnog operatora

U ovoj glavi podrazumjevamo da je V vektorski prostor nad poljem kompleksnih brojeva (skraćeno: kompleksan vektorski prostor).

3.1 Žordanova forma nilpotentnog operatora

Definicija 3.1.1. Linearni operator $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$ se naziva nilpotentnim, ako postoji prirodan broj m tako da je $\mathscr{A}^m = \mathcal{O}$ (Oznaka $\mathcal{O}$ stoji za nula-operator).

Recimo, operator diferenciranja $\mathscr{D} \in \mathcal{L}(M_n \to M_n)$ je nilpotentan jer važi $\mathscr{D}^{n+1} = \mathcal{O}$.

Definicija 3.1.2. Kvadratna matrica oblika

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{k\times k}.$$

se naziva Žordanovom ćelijom dimenzije k.

Primjetimo da je $J_k(0)$ nilpotentna matrica, jer je $J_k(0)^k = O$.

Teorema 3.1.3. *Operator $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$ je nilpotentan ako i samo ako ima jedinstvenu svojstvenu vrijednost $\lambda = 0$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$ nilpotentni operator i neka je $\mathscr{A}^m \equiv \mathcal{O}$. Pokazaćemo da $\mathscr{A}$ ne može imati svojstvenih vrijednosti različitih od nule. Zaista, neka je λ svojstvena vrijednost za $\mathscr{A}$ i neka je x odgovarajući svojstveni vektor. Tada je $\mathscr{A}^m x = \lambda^m x$. Međutim, $\mathscr{A}^m = \mathcal{O}$, pa mora biti $\lambda = 0$ (jer je $x \neq \theta$).

Obrnuto, ako je 0 jedina svojstena vrijednost operatora $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$, tada je karakteristični polinom operatora za $\mathscr{A}$ jednak $\chi_{\mathscr{A}}(t) = (-1)^n t^n$, $n = \dim V$. Prema Hamilton-Kejijevoj teoremi imamo $(-1)^n \mathscr{A}^n \equiv \mathcal{O}$, tj. operator $\mathscr{A}$ je nilpotentan. □

Teorema 3.1.4. *Neka je $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$ nilpotentan operator. Tada postoji baza h u prostoru V takva da matrica operatora $\mathscr{A}$ ima sljedeći oblik:*

$$A(h) = \begin{pmatrix} J_{k_1}(0) & O & \dots & O \\ O & J_{k_2}(0) & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \dots & J_{k_p}(0) \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

gdje su $J_{k_1}(0), J_{k_2}(0), \dots, J_{k_p}(0)$ Žordanove ćelije dimenzija $k_1, k_2, \dots, k_p$ respektivno, pri čemu je $k_1 + k_2 + \dots + k_p = n = \dim V$.

Dokaz. Postoji prirodan broj m, tako da $\mathscr{A}^m = \mathcal{O}$ i $\mathscr{A}^{m'} \neq \mathcal{O}$ ako je $m' < m$. Razmotrićemo niz operatora:

$$\mathscr{I} = \mathscr{A}^0, \mathscr{A} = \mathscr{A}^1, \mathscr{A}^2, \dots, \mathscr{A}^{m-1}, \mathscr{A}^m = \mathcal{O}.$$

Tada za potprostore $V_j = \operatorname{Ker} \mathscr{A}^j$, $j = \overline{0, m}$ važi:

(i) $V_{j-1} \subseteq V_j$, $j = \overline{1, m}$;

(ii) V_j je invarijantan za $\mathscr{A}$.

Naime, $x \in V_{j-1} \Rightarrow \mathscr{A}^{j-1}x = \theta \to \mathscr{A}^j = \mathscr{A}(\mathscr{A}^{j-1}x) = \mathscr{A}\theta = \theta \Rightarrow x \in \operatorname{Ker} \mathscr{A}^j = V_j$.

Pokažimo sada da je V_j invarijantan potprostor za $\mathscr{A}$: $x \in V_j \Rightarrow \mathscr{A}^j x = \theta \Rightarrow \mathscr{A}^{j-1}(\mathscr{A}x) = \theta \Rightarrow \mathscr{A}x \in \operatorname{Ker} \mathscr{A}^{j-1} = V_{j-1} \subseteq V_j$.

Prema (i) imamo: $\{\theta\} = V_0 \subseteq V_1 \subseteq V_2 \subseteq \dots \subseteq V_{m-2} \subseteq V_{m-1} \subseteq V_m = V$.

Korak I. Ako je $m \geq 2$ (tj. ako operator A nije nula-operator) uočimo tri posljednja potprostora $V_{m-2} \subseteq V_{m-1} \subseteq V_m = V$ i neka je

$$V_m = V_{m-1} \oplus V'_{m-1},$$

tj. neka je V'_{m-1} direktna dopuna potprostora V_{m-1} do prostora V_m. Kako je $\mathscr{A}^m = \mathcal{O}$ i $\mathscr{A}^{m-1} \neq \mathcal{O}$, imamo $V_{m-1} \neq V_m$ i, dakle, $V'_{m-1} \neq \{\theta\}$.

Izaberimo bazu $\{v_1, v_2, \dots, v_s\}$ u V'_{m-1}. Sistem vektora $\{\mathscr{A}v_1, \mathscr{A}v_2, \dots, \mathscr{A}v_s\} \subseteq V_{m-1}$ je linearno nezavisani i važi

$$\operatorname{Lin}\{\mathscr{A}v_1, \mathscr{A}v_2, \dots, \mathscr{A}v_s\} \cap V_{m-2} = \{\theta\}.$$

Naime, neka je $\alpha_1\mathscr{A}v_1 + \alpha_2\mathscr{A}v_2 + \dots + \alpha_s\mathscr{A}v_s = v \in V_{m-2}$. Pokazaćemo da je tada $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_s = 0$ i prema tome je $v = \theta$.

Kako je $V_{m-2} = \operatorname{Ker} \mathscr{A}^{m-2}$, imamo $\mathscr{A}^{m-2}v = \theta$, tj. $\mathscr{A}^{m-2}(\alpha_1\mathscr{A}v_1 + \alpha_2\mathscr{A}v_2 + \dots + \alpha_s\mathscr{A}v_s) = \mathscr{A}^{m-2}v = \theta$. Odavde je $\alpha_1\mathscr{A}^{m-1}v_1 + \alpha_2\mathscr{A}^{m-1}v_2 + \dots + \alpha_s\mathscr{A}^{m-1}v_s = \theta$, tj. $\mathscr{A}^{m-1}(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_s v_s) = \theta$, odnosno $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_s v_s \in V_{m-1}$. Kako vektori $v_1, v_2, \dots, v_s$ leže u V'_{m-1}, to je $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_s v_s \in V'_{m-1}$. No, $V_{m-1} \cap V'_{m-1} = \{\theta\}$, pa mora biti $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_s v_s = \theta$. Sada iz linearne nezavisnosti sistema vektora $\{v_1, v_2, \dots, v_s\}$ slijedi $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_s = 0$, pa i $v = \theta$.

Primijetimo da je sistem vektora:

$$\begin{array}{r|l} V'_{m-1} \supseteq & \{v_1, v_2, \dots, v_s\} \cup \\ V_{m-1} \supseteq & \{\mathscr{A}v_1, \mathscr{A}v_2, \dots, \mathscr{A}v_s\} \end{array}$$

linearno nezavisan, budući da su podsistemi $\{v_1, v_2, \ldots, v_s\}$ i $\{\mathscr{A} v_1, \mathscr{A} v_2, \ldots, \mathscr{A} v_s\}$ linearno nezavisni i leže respektivno u prostorima V'_{m-1} i V_{m-1} u čijem je presjeku samo nula-vektor.

Korak II. Ako je $m \geq 3$, razmotrimo potprostore $V_{m-3} \subseteq V_{m-2} \subseteq V_{m-1}$.

Vektori $\mathscr{A} v_1, \mathscr{A} v_2, \ldots, \mathscr{A} v_s$ leže u V_{m-1} i kako smo pokazali ne leže u V_{m-2}, pa je $V_{m-1} \neq V_{m-2}$ i znači $V_{m-1} = V_{m-2} \oplus V'_{m-2}$, gdje je $V'_{m-2} \neq \{\theta\}$ dopuna potprostora V_{m-2} do prostora V_{m-1}. Pri tome V'_{m-2} možemo izabrati tako da sadrži linearno nezavisan sistem vektora $\{\mathscr{A} v_1, \mathscr{A} v_2, \ldots, \mathscr{A} v_s\}$. Dopunimo (ako je potrebno) ovaj linearno nezavisan sistem vektora do baze $\{\mathscr{A} v_1, \ldots, \mathscr{A} v_s, v_{s+1}, \ldots, v_r\}$ u V'_{m-2}. Vektori $\mathscr{A}^2 v_1, \ldots, \mathscr{A}^2 v_s, \mathscr{A} v_{s+1}, \ldots, \mathscr{A} v_r$ prema svojstvu (i) leže u potprostoru V_{m-2}. Pokažimo da su oni linearno nezavisni i da je

$$\mathrm{Lin}\{\mathscr{A}^2 v_1, \ldots, \mathscr{A}^2 v_s, \mathscr{A} v_{s+1}, \ldots, \mathscr{A} v_r\} \cap V_{m-3} = \{\theta\}.$$

Neka je $\beta_1 \mathscr{A}^2 v_1 + \cdots + \beta_s \mathscr{A}^2 v_s + \beta_{s+1} \mathscr{A} v_{s+1} + \cdots + \beta_r \mathscr{A} v_r = w \in V_{m-3}$. Kako je $V_{m-3} = \operatorname{Ker} \mathscr{A}^{m-3}$, imamo $\mathscr{A}^{m-3} w = \theta$. Odavde je

$$\mathscr{A}^{m-2}(\beta_1 \mathscr{A} e_1 + \cdots + \beta_s \mathscr{A} e_s + \beta_{s+1} e_{s+1} + \cdots + \beta_r e_r) = \mathscr{A}^{m-3} w = \theta.$$

Dakle, $\beta_1 \mathscr{A} v_1 + \cdots + \beta_s \mathscr{A} v_s + \beta_{s+1} v_{s+1} + \cdots + \beta_r v_r \in V_{m-2}$. S druge strane, ovaj vektor leži u V'_{m-2}, jer vektori $\mathscr{A} e_1, \ldots, \mathscr{A} e_s, e_{s+1}, \ldots, e_r$ leže u V'_{m-2}. Kako je $V_{m-2} \cap V'_{m-2} = \{\theta\}$, imamo $\beta_1 \mathscr{A} e_1 + \cdots + \beta_s \mathscr{A} e_s + \beta_{s+1} e_{s+1} + \cdots + \beta_r e_r = \theta$. Pošto su vektori $\mathscr{A} e_1, \ldots, \mathscr{A} e_s, e_{s+1}, \ldots, e_r$ linearno nezavisni, mora biti $\beta_1 = \cdots = \beta_s = \beta_{s+1} = \cdots = \beta_r = 0$ i $w = \theta$.

Primijetimo da je sistem vektora:

$$\begin{array}{r|l} V'_{m-1} \supseteq & \{v_1, \ldots, v_s\} \cup \\ V'_{m-2} \supseteq & \{\mathscr{A} v_1, \ldots, \mathscr{A} v_s, v_{s+1}, \ldots, v_r\} \cup \\ V_{m-2} \supseteq & \{\mathscr{A}^2 v_1, \ldots, \mathscr{A}^2 v_s, \mathscr{A} v_{s+1}, \ldots, \mathscr{A} v_r\} \end{array}$$

linearno nezavisan, budući da sistemi vektora $\{v_1, v_2, \ldots, v_s\}$, $\{\mathscr{A} v_1, \mathscr{A} v_2, \ldots, \mathscr{A} v_s, v_{s+1}, \ldots, v_r\}$ i $\{\mathscr{A}^2 v_1, \mathscr{A}^2 v_2, \ldots, \mathscr{A}^2 v_s, \mathscr{A} v_{s+1}, \ldots, \mathscr{A} v_r\}$ jesu linearno nezavisni i leže respektivno u potprostorima V'_{m-1}, V'_{m-2} i V_{m-2}, čija je direktna suma V, tj. $V = V_{m-2} \oplus V'_{m-2} \oplus V'_{m-1}$. Kako je suma direkta presjek svaka dva različita potprostora je samo nula-vektor.

Ako je $m \geq 4$ razmotrimo trojku potprostora $V_{m-4} \subseteq V_{m-3} \subseteq V_{m-2}$ i nastavimo isti algoritam kao u prethodnom koraku. Broj ovakvih koraka je konačan, jer je prostor V konačnodimenzionalan.

Dakle, nakon konačnog broja koraka doći ćemo sljedećih direktnih dekompozicija:
$V = V_m$;
$V_m = V_{m-1} \oplus V'_{m-1}$;
$V_{m-1} = V_{m-2} \oplus V'_{m-2}$;
$V_{m-2} = V_{m-3} \oplus V'_{m-3}$;
$\ldots$
$V_1 = V_0 \oplus V'_0$;
$V_0 = \{\theta\}$,
i do baze u prostoru V, koja ćemo podjeliti po kolonomа u sljedećoj tablici:

V'_{m-1}	v_1	$\ldots$	v_s							
V'_{m-2}	$\mathscr{A} v_1$	$\ldots$	$\mathscr{A} v_s$	v_{s+1}	$\ldots$	v_r				
V'_{m-3}	$\mathscr{A}^2 v_1$	$\ldots$	$\mathscr{A}^2 v_s$	$\mathscr{A} v_{s+1}$	$\ldots$	$\mathscr{A} v_r$	v_{r+1}	$\ldots$	v_t	
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	
V'_0	$\mathscr{A}^{m-1} v_1$	$\ldots$	$\mathscr{A}^{m-1} v_s$	$\mathscr{A}^{m-2} v_{s+1}$	$\ldots$	$\mathscr{A}^{m-2} v_r$	$\mathscr{A}^{m-3} v_{r+1}$	$\ldots$	$\mathscr{A}^{m-3} v_t$	$\ldots$

Razmotrimo sada svojstva sistema vektora iz posljednje tablice:

(1) Svaki vektor iz posljednje vrste tablice se pod dejstvom operatora $\mathscr{A}$ slika u nula-vektor. Drugim riječima, u posljednjoj vrsti se nalaze svojstveni vektori operatora $\mathscr{A}$ (podsjetimo da je jedina svojstvena vrijednost operatora $\mathscr{A}$ nula).

(2) Izaberimo proizvoljnu kolonu tablice. Neka je indeks izabrane kolone i i neka ona sadrži k vektora. Numerišimo vektore iz ove kolone redom odozdo prema gore:

$$h_1 = \mathscr{A}^{k-1}v_i,\ h_2 = \mathscr{A}^{k-2}v_i, \dots h_{k-1} = \mathscr{A}v_i,\ h_k = v_i.$$

Sada se lako provjerava da važi:

(a) Sistem vektora $\{h_1, h_2, \dots, h_k\}$ je linearno nezavisan;

(b) $\mathscr{A}h_1 = \theta, \mathscr{A}h_2 = h_1, \dots, \mathscr{A}h_k = h_{k-1}$;

(c) Potprostor $W = \mathrm{Lin}\{h_1, h_2, \dots, h_k\}$ je invarijantan za operator $\mathscr{A}$;

(d) Matrica suženog operatora $\mathscr{A}|_W$ u bazi $\{h_1, h_2, \dots, h_k\}$ je Žordanova ćelija $J_k(0)$.

Na kraju numerišimo vektore tablice počevši od prve kolone redom, odozdo prema gore. Nao ovaj način dobijen sistem h je baza u kojoj matrica nilpotentnog operatora $\mathscr{A}$ ima oblik (3.1). □

Primjedba 3.1.5. (i) Iz prethodnog dokaza, prema konstrukciji baze h, slijedi da svakoj koloni u tablici odgovara jedna Žordanova ćelija $J_k(0)$.

(ii) Prilikom konstrukcije baze h moguće su različite numeracije kolona, tj. različite numeracije svojstvenih vektora u posljednjoj vrsti. Iz dokaza je jasno da različite numeracije kolona dovode do zamjene Žordanovih ćelija mjestima.

Prethodna primjedba nam dozvoljava da izvučemo sljedeće zaključke:

(i) Žordanova forma operatora je jedinstvena do na zamjenu mjesta Žordanovih ćelija;

(ii) Matrice su slične ako i samo ako imaju istu Žordanovu formu (do na zamjenu mjesta Žordanovim ćelijama).

3.2 Žordanova forma opšteg linearnog operatora

Sada se osvrnimo na opšti slučaj, tj. kada operator $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$ nije obavezno nilpotentan. Najprije razmotrimo slučaj kada operator ima jedinstvenu svojstvenu vrijednost.

Lema 3.2.1. *Neka je V kompleksan vektorski prostor i λ jedinstvena svojstvena vrijednost operatora $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$. Tada u prostoru V postoji baza h u kojoj matrica operatora $\mathscr{A}$ ima oblik:*

$$A(h) = \begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda) & O & \dots & O \\ O & J_{k_2}(\lambda) & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \dots & J_{k_p}(\lambda) \end{pmatrix},$$

Dokaz. Primijetimo da je operator $\mathscr{B} = \mathscr{A} - \lambda\mathscr{I}$ nilpotentan. Prema prethodnoj teoremi postoji baza h u kojoj matrica operatora $\mathscr{B}$ ima oblik (3.1). Kako je $A(h) = B(h) + \lambda I$ slijedi tvrđenje Leme. □

Teorema 3.2.2. *Neka je V kompleksan vektorski prostor i $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$ operator čiji je karakteristični polinom:*

$$\chi_{\mathscr{A}}(t) = (-1)^n (t-\lambda_1)^{l_1} (t-\lambda_2)^{l_2} \cdots (t-\lambda_k)^{l_k},$$

gdje su $l_1, l_2, \ldots, l_k$ algebarske kratnosti svojstvenih vrijednosti $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, redom; $l_1 + l_2 + \cdots + l_k = n = \dim V$. Tada postoji baza h u V takva da je

$$A(h) = \begin{pmatrix} A_1 & O & \ldots & O \\ O & A_2 & \ldots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \ldots & A_k \end{pmatrix},$$

gdje kvadratne matrice $A_1, A_2, \ldots, A_k$ imaju sljedeći oblik:

$$A_i = \begin{pmatrix} J_{i_1}(\lambda_i) & O & \ldots & O \\ O & J_{i_2}(\lambda_i) & \ldots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \ldots & J_{i_p}(\lambda_i) \end{pmatrix},$$

$i_1 + i_2 + \cdots + i_m = l_i$, $i = 1, \ldots, k$.

Dokaz. Neka je $\mathscr{B} \in \mathcal{L}(V \to V)$ i označimo $K_j = \operatorname{Ker} \mathscr{B}^j$ i $L_j = \operatorname{Im} \mathscr{B}^j$ za cijele brojeve $j \geq 0$. Jasno je da je K_j, $j \geq 0$, rastući niz potprostora, a da je L_j, $j \geq 0$ opadajući niz potprostora. Budući da je V konačne dimenzije postoji cio broj $j_0 \geq 0$ takav da je $K_j = K_{j_0}$ i takođe $L_j = L_{j_0}$, $j \geq j_0$.

Neka je $N = K_{j_0}$ i $M = L_{j_0}$. Tada su N i M invarijantni potprostori za operator $\mathscr{B}$. Pokazaćemo da je $M \oplus N = V$. Naime, kako je $\mathscr{B}(M) = M$, suženi operator $\mathscr{B}|_M : M \to M$ jeste invertibilan. Takođe imamo $\mathscr{B}^{j_0} x \neq \theta$, ako je $x \in M$ i $x \neq \theta$. Kako je suženi operaor $\mathscr{B}|_N : N \to N$ jednak nula-operatoru, slijedi da je presjek N i M samo nula-vektor. Neka je $x \in V$ proizvoljan vektor i $\mathscr{B}^{j_0} x = y \in M$. Kako je $\mathscr{B}^{j_0}|_M$ invertibilan, postoji $z \in M$ tako da je $\mathscr{B}^{j_0} x = \mathscr{B}^{j_0} z$. Sada imamo $x = (x - z) + z$, pri čemu je $x - z \in N$ i $z \in M$. Ovim smo pokazali da je suma potprostora N i M jedanka V.

Prethodno možemo primjeniti prvo za operator $\mathscr{B} = \mathscr{A} - \lambda_1 \mathscr{I}$. Dobijamo razlganje prostora V na deirektnu sumu $N_1 \oplus M_1$, pri čemu su N_1 i M_1 invarijantni potprostori za operator $\mathscr{A} - \lambda_1 \mathscr{I}$, a to znači i za sam operator $\mathscr{A}$. Razmotrimo sada operator $\mathscr{A} - \lambda_2 \mathscr{I} : M_1 \to M_1$. Tada dolazimo do razlaganja prostora $M-1$ na direktnu sumu $M_1 = N_2 + M_2$ na početku opisan način. Pri tome su N_2 i M_2 takođe invarijanti potprostori za operator $\mathscr{A}$. Potom nastavimo sa direktim razlaganjem prostora M_2 posmatrajući $\mathscr{A} - \lambda_3 \mathscr{I}$ na M_2. Na kraju postupka ponovimo isto za $\mathscr{A} - \lambda_k \mathscr{I}$ na potprostor M_{k-1}. Taj prostor se razlaže na direktnu sumu $M_{k-1} = N_k \oplus M_k$. Pokazaćemo da je M_k trivijalan potprostor.

Na opisan način dobijamo direktnu dekompoziciju $V = N_1 \oplus N_2 \oplus \cdots \oplus N_k \oplus M_k$ na invarijantne potprostore operatora $\mathscr{A}$. Primijetimo da suženi operator $\mathscr{A}|_{N_j}$ ima jedinu svojstvenu vrijednost λ_j i prostor N_j sadrži sve svojstvene vektore koji odgovaraju λ_j. Dakle, M_k mora biti trivijalan potprostor, jer bi se u protivnom za operator $\mathscr{A}$ pojavila nova svojstvena vrijednost ili svojstveni vektor koji odgovara nekoj od svojstvenih vrijednosti λ_j. Karakteristični poilonom za suženi operator $\mathscr{A}|_{N_j}$ je jednak $\pm(x-\lambda_j)^{l'_j}$, gdje je $l'_j = \dim N_j$. Kako mora biti $l'_j \leq l_j$ imamo $\sum_{j=1}^{k} l'_j \leq n$. ako bi važila stroga nejednakost $l'_j < l_j$ za neko j, tada bi bilo $\sum_{j=1}^{k} l'_j < n$. A to pritvrječi tome da je $\sum_{j=1}^{k} l'_j = n$.

Sada preostaje da se primjeni prethodna lema na svaki suženi operator $\mathscr{A}|_{N_j}$, $j=\overline{1,k}$. □

Definicija 3.2.3. Bazu u kojoj matrica operatora ima oblik Žordanove forme ćemo nazivati kanonskom bazom.

Primjer 3.2.4. Naći kanonsku bazu i Žordanovu formu matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 5 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Karakteristični polinom je zadat sa $\chi_A(t) = \det(A - tI) = -(t-3)(t-2)^2$, pa su svojstvene vrijednosti matrice $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$. Prva svojstvena vrijednost ima algebarsku kratnost 1, a druga kratnost 2.

Pošto je svojstvena vrijednost $\lambda_1 = 3$ algebarske kratnosti 1, to možemo tvrditi da njoj odgovara tačno jedan linearno nezavisni svojstveni vektor zadat jednakošću $Ah_1 = 3h_1$. Ovom svojstvenom vektoru će odgovarati jedna (jednodimenzionalna) Žordanova ćelija.

S druge strane, svojstvenoj vrijednosti $\lambda_2 = 2$ može odgovarati jedan ili dva linearno nezavisna svojstvena vektora. Ove dvije moguće situacije možemo prikazati u obliku sljedećih dijagrama:

$$\begin{array}{cc} & \cdot h_3 \\ h_1\cdot & \cdot h_2 \end{array} \qquad \textit{ili} \qquad \begin{array}{ccc} h_1 & h_2 & h_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

Tačkice u donjim vrstama stoje umjesto svojstvenih vektora.

U drugom slučaju, matrica A ima tri linearno nezavisna svojstvena vektora, pa je to matrica proste strukture (baza od svojstvenih vektora) i njena Žordanova forma će biti dijagonalnog oblika (imaće tri jednodimenzionalne Žordanove ćelije). Pri tome će kanonsku bazu činiti svojstveni vektori h_1, h_2, h_3.

U prvom slučaju, matrica će imati dva svojstvena vektora h_1, h_2, a treći vektor iz kanonske baze ćemo tražiti iz jednakosti $(A - \lambda_2 I)h_3 = h_2$.

Kako bismo razjasnili koji od ova dva slučaja ima mjesto, dovoljno je provjeriti rang matrice $A - \lambda_2 I$. Ukoliko je rang ove matrice 1, to bi značilo da svojstvenoj vrijednosti λ_2 odgovaraju $3-1=2$ linearno nezavisna svojstvena vektora h_2 i h_3, pa bi imao mjesto drugi slučaj. Ukoliko, naprotiv, $rank(A - \lambda_2 I) = 2$, to ima mjesto prvi slučaj.

Lako je provjeriti da $rank(A-2I) = 2$, što znači da ima mjesto lijevi dijagram i Žordanova forma sadrži dvije ćelije:

$$A(h) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Prva dva vektora u kanonskoj bazi su svojstveni vektori matrice A: $(A-3I)h_1 = 0$, $(A-2I)h_2 = 0$. Vektor h_3 ćemo dobiti iz jednakosti $(A - 3I)h_3 = h_2$.

Iz jednakosti $(A - 3I)h_1 = 0$ nalazimo $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Dalje, iz $(A-2I)h_2 = 0$ imamo $h_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Konačno jednakost $(A-2I)h_3 = h_2$ vodi nehomogenom sistemu linearnih jednačina

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {h_3}^1 \\ {h_3}^2 \\ {h_3}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Rješavanjem ovog sistema dobijamo $h_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Primijetimo da je moguća i drugačija numeracija vektora baze, u kojoj bi ćelije u Žordanovoj formi matrice zamijenile mjesta:

$$A(h) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Primjer 3.2.5. Neka je $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(M_2 \to M_2)$ zadat sa $\mathcal{T}f = -f - f'$. Naći Žordanovu formu $T(h)$ matrice operatora $\mathcal{T}$.

Najprije zapišimo matricu operatora u odnosu na bazu $g = \{1, t, t^2\}$. Imamo:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}1 &= -1; \\ \mathcal{T}t &= -t - 1; \\ \mathcal{T}t^2 &= -t^2 - 2t, \end{aligned}$$

pa je matrica operatora

$$T = T(g) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Karakteristični polinom operatora je $\chi_{\mathcal{T}}(t) = (-1-t)^3$, pa je $\lambda_1 = -1$ svojstvena vrijednost algebarske kratnosti 3. Dakle, operator $\mathcal{T}$ može imati 1, 2 ili 3 linearno nezavisna svojstvena vektora. Ovim trima situacijama odgovaraju sljedeći dijagrami:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdot h_3 & & & & & & \\ \cdot h_2 & & & \cdot h_3 & & & h_1 \quad h_2 \quad h_3 \\ \cdot h_1 & \quad ili \quad & h_1\cdot & \cdot h_2 & \quad ili \quad & & \cdot \quad\; \cdot \quad\; \cdot \end{array}$$

U zavisnosti od toga koja od ovih situacija ima mjesto, Žordanova forma se može sadržati 1, 2 ili 3 ćelije:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{ili} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{ili} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Lako je izračunati da $\operatorname{rank}(A - (-1)I) = 2$ odakle slijedi da ima mjesto prva situacija.